K.KURATOWSKI

introducción a la teoría de conjuntos y a la topología



Introducción a la Teoría de Conjuntos y a la Topología

Colección dirigida por R. Rodríguez Vidal
Catedrático de la Universidad de Zaragoza

manuales vicens—vives

Kazimierz Kuratowski
Universidad de Varsovia
Vicepresidente de la Academia Polaca de Ciencias

INTRODUCCION A LA TEORIA DE CONJUNTOS Y A LA TOPOLOGIA

Prólogo y Traducción de
R. RODRIGUEZ VIDAL
Catedrático de la Universidad de Zaragoza

editorial vicens—vives

Titulo original
«WSTĘP DO TEORII MNOGOSCI I TOPOLOGII»

Primera edición, 1966

Depósito Legal: B. 36 716 - 1966
N.º de orden V. V.: 537

IMPRESO EN ESPAÑA
PRINTED IN SPAIN

Editado por Editorial Vicens–Vives. Avda. de Sarriá, 132. Barcelona-17
Impreso por Talleres Gráficos Ibero-Americanos, S. A. : Provenza, 86. Barcelona-15

Prefacio a la edición española

Un somero examen de la literatura matemática publicada en los últimos treinta años pone de manifiesto, cada vez más, una circunstancia que pudo observarse anteriormente en los libros sobre temas de Física moderna y que para los científicos del pasado siglo debió de ser casi inimaginable. Nos estamos refiriendo al hecho de que sean los propios investigadores, los creadores de las teorías más nuevas y especializadas, quienes se ocupan con frecuencia, y con éxito notable, de redactar textos de introducción y de iniciación en las materias de su especialidad. De este modo, son ya muchos los sabios ilustres que han creído oportuno realizar personalmente el transporte al nivel de la divulgación, o siquiera al de textos iniciales, de las ideas en que profesionalmente se ocupan y que, en ocasiones, ellos mismos han concebido.

En esta nueva actitud todo son ventajas para la Ciencia y para los estudiosos, no siendo necesario que nos ocupemos aquí de agotar las razones, no todas triviales, en que apoyamos esa afirmación. Todavía E. Borel, por ejemplo, en el prólogo de una de sus obras para el gran público (concretamente, en la que dedica a la teoría de la relatividad) juzgaba necesario justificar su dedicación a esa tarea por la conveniencia de que no sólo lleguen al lector intelectualmente curioso divulgaciones de tercera o cuarta mano; en las que, añadiremos, las imprecisiones y errores se van incrementando, siempre ¡ay! en sentido peyorativo, cada vez que la exposición se trasvasa de mente a mente de peor calidad o menos dedicación.

Una justificación así no sería hoy necesaria. En primer lugar, el éxito de las exposiciones elementales debidas a los propios investigadores ha sido tan absoluto, que casi se ha hecho tópico pensar que quien mejor puede hacer entender a cualquiera una nueva teoría científica es su propio creador. Por lo menos, y aunque nada tiene carácter absoluto y hay también sabios de expresión oscura e incapaces de superar un estilo arcano, sí está ya demostrado que no puede aceptarse, ni mucho menos, la propuesta dicotomía entre profesores que saben investigar y profesores que saben explicar.

Digamos ahora que, a nuestro juicio, la dedicación de los autores investigadores a este otro tipo de trabajos obedece a una exigencia de su magisterio, a una necesidad real. Puede imaginarse, en efecto, cómo durante muchos años estos maestros han visto llegar ante ellos grupos de

estudiosos con una formación científica desfasada, informados acaso de lo nuevo por divulgaciones de insuficiente calidad, es decir, sin las nociones exactas y precisas que sólo puede ofrecer un maestro que haya recorrido el campo de estudio hasta mucho más allá del punto que alcanza en sus explicaciones. Alumnos, pues, que antes de avanzar en sus conocimientos tienen con frecuencia el no poco penoso quehacer de olvidar lo que han aprendido mal o imprecisamente y sustituirlo luego por el sólido fundamento de los conceptos exactos. Esta fue sin duda la situación primero de los físicos y recientemente de los matemáticos en la enseñanza superior y ello justifica por sí solo que los mismos maestros creadores juzgaran más cómodo y rápido fijar una información, elemental pero exacta, breve pero precisa, de los conceptos básicos de las teorías de su especialidad.

Sea como fuere, el hecho es que hoy son absolutamente necesarias obras de garantía científica total para la iniciación del futuro investigador y para la información del público interesado en un tema intelectual determinado. Este criterio, precisamente, se ha tenido muy presente en la selección de los títulos y autores que han de integrarse en la colección de libros de Matemáticas que elabore la Editorial VICENS-VIVES.

El libro que el lector tiene en sus manos sería una prueba, si se necesitase, de la realidad de esta nueva situación. El profesor K. KURATOWSKI es una autoridad máxima de la Matemática moderna y, concretamente, en Teoría de conjuntos y Topología, tema al que ha dedicado también el trabajo de elaborar este pequeño y meritorio libro, como en otras ocasiones ha elaborado memorias, tesis y voluminosos tratados fundamentales que todos los matemáticos han utilizado para su formación.

Sobre el contenido y alcance de la obra no sería procedente extendernos aquí, pues el propio autor lo hace suficientemente en las páginas introductorias del texto. Queremos destacar sólo el interés con que los lectores de cultura filosófica (además, naturalmente, de los específicamente matemáticos) han de consultar las fundamentales ideas de Lógica matemática y de Aritmética transfinita que el autor expone con notable claridad.

R. R. V.

Zaragoza, 1965

Prefacio

Las ideas y métodos de la Teoría de conjuntos y de la Topología penetran ya en toda la Matemática actual. No es pues extraño que unos elementos de esas disciplinas sean hoy parte indispensable de una preparación matemática básica. Conceptos como los de unión e intersección de conjuntos, numerabilidad, conjunto cerrado, espacio métrico o representación homeomorfa son ya nociones clásicas para cualquier construcción matemática.

El propósito de este volumen es ofrecer una presentación fácilmente accesible de los conceptos fundamentales de Teoría de conjuntos y de Topología; se ha puesto gran interés en presentar la materia desde el punto de vista de su aplicación al Análisis, Geometría y otras ramas de la Matemática, tales como la Teoría de probabilidades y el Álgebra. Por esto, algunos resultados importantes para la Teoría de conjuntos o la Topología, pero que no tienen gran conexión con otras partes de la Matemática, son tratados ligeramente u omitidos. Temas de éstos son, por ejemplo, las investigaciones axiomáticas, la aritmética de los « alef » y la teoría de curvas.

La mayor parte del volumen presente es una introducción a las teorías citadas, Conjuntos y Topología, que cualquier principiante entenderá fácilmente. Las secciones marcadas con un asterisco desarrollan cuestiones más complicadas o que suelen omitirse en un primer estudio. Lo mismo digo para los ejercicios, en algunos de los cuales el lector se encontrará con multitud de aplicaciones e interesantes resultados que no podían incluirse en el texto sin acrecerlo demasiado. En esta edición se incluyen varios ejercicios nuevos que no figuran en la edición polaca.

Con gusto doy las gracias al profesor J. Jaworowski y al Dr. A. Granas por su cooperación al preparar la edición polaca, y también agradezco a los profesores A. Mostowski y R. Sikorski, Dr. S. Mrówka, Sr. R. Engelking y Dr. A. Schinzel los numerosos comentarios con que me ayudaron a mejorar el manuscrito.

Kazimierz Kuratowski

Varsovia.

Indice

Págs.

I PARTE

TEORÍA DE CONJUNTOS

II Parte

TOPOLOGÍA

Págs.

I PARTE

Teoría de Conjuntos

Introduccion a la parte I

El concepto de conjunto es uno de los más fundamentales de la Matemática y de los más frecuentemente utilizados. En cada campo particular de la Matemática tenemos que tratar con conjuntos especiales, tales como el conjunto de los números complejos, el conjunto de los puntos de un círculo, el conjunto de las funciones continuas, el conjunto de las funciones integrales, y así sucesivamente.

El objeto de la Teoría de conjuntos es investigar las propiedades de los conjuntos desde el punto de vista más general. En Geometría consideramos conjuntos cuyos elementos son puntos, en Aritmética se consideran conjuntos cuyos elementos son números, en el Cálculo de variaciones intervienen conjuntos de funciones o de curvas; ahora bien, la Teoría de conjuntos considera las propiedades generales a todos los conjuntos, independientemente de la naturaleza particular de los elementos incluídos en ellos. Esto se aclarará con algunos ejemplos que daremos aquí, en una previa ojeada del contenido de la primera parte de este volumen.

En el Capítulo 2 consideraremos las operaciones con conjuntos, que son análogas a las operaciones aritméticas: para cada par de conjuntos A y B formaremos su *unión*, $A \cup B$, entendiendo por esto el conjunto compuesto precisamente con los elementos del conjunto A y los elementos del conjunto B; también formaremos la *intersección*, $A \cap B$, de los conjuntos A y B, y entenderemos por esto el conjunto de los elementos comunes a los conjuntos A y B. Estas operaciones tienen en cierto sentido un carácter algebraico, es decir, tienen las propiedades conmutativa, asociativa y distributiva. Naturalmente, estas propiedades no dependen de que esos conjuntos sean de números, puntos u otros elementos matemáticos; son propiedades generales de los conjuntos y por eso la investigación de tales propiedades pertenece al dominio de la Teoría de conjuntos.

En el Capítulo 3 consideraremos otro tipo de operación, llamada *producto cartesiano*. Para dos conjuntos dados X e Y designamos por $X \times Y$ el conjunto de todos los pares de elementos $\langle x, y \rangle$ en que el primero pertenece al conjunto X y el segundo al conjunto Y. Así pues, si X e Y indican el conjunto de los números reales, o puntos de la recta real, $X \times Y$ representa los puntos del plano, de donde el nombre de producto cartesiano, dado en honor del gran matemático francés Descartes (1596-1650), quien

al considerar el plano como un conjunto de pares de números reales, inició una nueva rama de las Matemáticas, llamada *Geometría Analítica*. La deducción de las propiedades del producto cartesiano en relación con las dos operaciones con conjuntos mencionadas antes, se expone en el Capítulo 3.

El concepto de producto cartesiano nos permite definir el concepto de *función* de una forma completamente general. Lo hacemos así en el Capítulo 4. Un papel especial juegan en la Teoria de conjuntos las funciones uno-uno. Son funciones que aplican el conjunto X sobre el conjunto Y de modo tal, que a dos elementos distintos del conjunto X corresponden dos elementos distintos del conjunto Y (entonces la función inversa de la función dada, que aplica el conjunto Y sobre el conjunto X, es también uno-uno). Si existe una aplicación uno-uno del conjunto X sobre el conjunto Y, decimos que ambos conjuntos son de *igual potencia*. La igualdad de potencia es una generalización de la idea de igualdad de número de elementos; el significado de esta generalización está en el hecho de que también puede ser aplicada a conjuntos infinitos. Por ejemplo, se ve fácilmente que el conjunto de todos los números pares tiene la misma potencia que el conjunto de todos los números enteros; en cambio, el conjunto de todos los números reales no tiene la misma potencia que el conjunto de todos los números naturales. (Resultado éste, que no es obvio inmediatamente). Por tanto, podemos en cierto sentido clasificar los conjuntos con respecto a su potencia. Puede también, gracias a esto, extenderse la serie de los números naturales, introduciendo números que caractericen la potencia de conjuntos infinitos (los llamados *números cardinales*). En particular, a los conjuntos que tienen la misma potencia que el conjunto de todos los números naturales (a los que se llama conjuntos infinitos numerables) les asignamos el número cardinal $\mathfrak{a}$, y al conjunto de todos los números reales le asignamos el cardinal $\mathfrak{c}$ (potencia del continuo). Resulta que existe una infinidad de números cardinales infinitos. No obstante, en las aplicaciones de la teoría de conjuntos a otras ramas de las Matemáticas, sólo dos de ellos juegan un papel esencial: $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{c}$. Nos ocupamos, pues, en una investigación previa de lo relativo a estos dos números. Esto forma el contenido de los Capítulos 5 y 6.

El Capítulo 7 está destinado a los *conjuntos ordenados*, tales como el conjunto de los números naturales, el conjunto de los números racionales y el de los números reales. En cada conjunto de éstos la relación « menor que » determina la ordenación; pero los tipos de orden de estos tres conjuntos difieren de una manera esencial: en el primero de ellos existe siempre el elemento inmediatamente siguiente a otro dado (n y $n+1$); en el segundo, no existen tales elementos sucesivos (por lo que decimos que la ordenación es densa), aunque, no obstante, existen « huecos » (en el sen-

tido de Dedekind); mientras que el conjunto de los números reales no tiene tales « huecos ».

Una clase especialmente importante de conjuntos ordenados son los conjuntos *bien ordenados*, es decir aquéllos en los que todo subconjunto no vacío tiene un primer elemento. Un ejemplo de conjunto bien ordenado es el conjunto de los números naturales (en cambio, el conjunto de todos los enteros no es bien ordenado, puesto que ese conjunto no tiene un primer elemento). También es conjunto bien ordenado, aunque de diferente tipo de orden, el conjunto formado por los números de forma $1 - \frac{1}{n}$ y los de la forma $2 - \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ En el Capítulo 8 damos los teoremas más importantes relativos a los conjuntos bien ordenados. Entre otras cosas, demostramos que de dos tipos de orden distintos de conjuntos bien ordenados, uno es siempre una ampliación del otro (en un sentido que en el texto se precisa mejor). De aquí se sigue el importante Corolario que afirma que, de dos conjuntos bien ordenados diferentes, uno es de potencia igual a la de un subconjunto del otro; con la terminología de los números cardinales esto quiere decir que de dos números cardinales distintos correspondientes a conjuntos bien ordenados, uno es siempre menor que otro. En relación con este teorema, se presenta la conjetura fundamental: ¿existe para cualquier conjunto una relación que establezca su buena ordenación? Demostraremos que es así en efecto, si admitimos el axioma de elección. Este importante teorema es el último de la Primera Parte de este libro.

La discusión de la Teoría de conjuntos dada aquí se basa en un sistema de *axiomas*. Aunque en la parte inicial de la teoría, es decir, en el Álgebra de conjuntos y en el concepto de conjunto con que tenemos que comenzar las Matemáticas (así, por ejemplo, en el concepto de un conjunto de números, de puntos, de curvas, etc.), no se presentan dificultades lógicas, una construcción más avanzada de la Teoría de conjuntos que no esté basada en un sistema de axiomas llega a hacerse imposible, pues existen problemas a los que una idea « ingenua » de conjunto ofrece respuestas contradictorias. Precisamente, la falta de los fundamentos necesarios de la Teoría de conjuntos en el periodo inicial de su desarrollo llevó a las llamadas antinomias, es decir contradicciones, que no se pudieron interpretar con la simple idea intuitiva de conjunto. Sólo la construcción axiomática de la Teoría de conjuntos ha llevado a la eliminación de estas antinomías (cfr. Cap. 6.2, nota 2).

En el presente libro no analizamos muy estrictamente los axiomas de la Teoría de conjuntos o la fundamentación lógica del tema. Aunque estas cuestiones forman por sí mismas una parte importante de la Matemática y han sido desarrolladas activamente, la discusión de ellas en este libro

desbordaría nuestra principal meta, que es la presentación de los temas más importantes de la Teoría de conjuntos y la Topología desde el punto de vista de sus aplicaciones a otras ramas de la Matemática.

En la primera parte de este libro, el lector encontrará bastante información sobre *Lógica matemática*. La notación de la Lógica matemática es un instrumento indispensable en la Teoría de conjuntos y puede ser aplicada con gran provecho en otras cuestiones. En los Capítulos 1 y 3 hemos dado los principales teoremas relativos al cálculo de proposiciones, funciones proposicionales y cuantificadores. La notación de la Lógica matemática no está desprovista de valores didácticos generales; por ejemplo, para conceptos tales como los de convergencia uniforme o continuidad uniforme, es posible observar que la definición de esos conceptos gana mucho en precisión y lucidez cuando se escriben con el simbolismo de la Lógica matemática.

En el primer período de su existencia, la Teoría de conjuntos fue prácticamente exclusiva creación de G. Cantor (1845-1918). En el período precedente a la aparición de los trabajos de Cantor, se publicaron trabajos sobre conceptos que ahora se incluyen en la Teoría de conjuntos (por autores como Dedekind, Du Bois-Reymond, Bolzano), pero, no obstante, la investigación sistemática de las propiedades generales de los conjuntos, la formulación de definiciones y teoremas básicos y la fundamentación de una nueva disciplina matemática, es el trabajo personal de G. Cantor (durante los años 1871-1883).

El estímulo para las investigaciones que crearon la Teoría de conjuntos lo dieron problemas del Análisis, las investigaciones sobre los fundamentos de la teoría de los números irracionales, la teoría de las series trigonométricas, etc. Sin embargo, el desarrollo posterior de la Teoría de conjuntos se realizó en un sentido abstracto, poco relacionado con otras ramas de la Matemática. Este hecho, junto con una cierta rareza en los métodos de la Teoría de conjuntos, que eran enteramente diferentes de los utilizados hasta entonces, hicieron inicialmente que muchos matemáticos miraran esta nueva rama de la Matemática con un cierto grado de desconfianza y aversión. En el curso de los años, no obstante, la Teoría de conjuntos mostró su utilidad en muchas ramas de la Matemática, tales como la teoría de funciones analíticas, o la teoría de la medida, convirtiéndose entonces en una base indispensable para nuevas disciplinas matemáticas (tales como la Topología, la teoría de funciones de una variable real, los fundamentos de la Matemática, etc.) de modo que ha venido a ser una parte e instrumento especialmente importante de la Matemática moderna.

CAPÍTULO **1**

Cálculo proposicional

Aplicaremos el cálculo proposicional a aquellas proposiciones que son susceptibles de tomar uno de los valores lógicos, 0 y 1, asignándose el valor 0 a la proposición falsa y el valor 1 a la proposición verdadera. (En particular todas las proposiciones matemáticas son de este tipo, es decir, toman uno de estos dos valores).

1.1. Disyunción y conjunción de proposiciones

Si α y β son dos proposiciones, la proposición «α o β» la escribiremos en lo que sigue como una *disyunción* $\alpha \vee \beta$, y la proposición «α y β» la escribiremos en forma de *conjunción* $\alpha \wedge \beta$.

Es claro que la proposición $\alpha \vee \beta$ es cierta si al menos una de sus componentes lo es, mientras que la proposición $\alpha \wedge \beta$ es verdad tan sólo cuando lo son ambos componentes. Lo anterior puede expresarse con brevedad y precisión en forma de tabla, como sigue:

(1) $\quad 0 \vee 0 \equiv 0, \quad 0 \vee 1 \equiv 1, \quad 1 \vee 0 \equiv 1, \quad 1 \vee 1 \equiv 1,$

(2) $\quad 0 \wedge 0 \equiv 0, \quad 0 \wedge 1 \equiv 0, \quad 1 \wedge 0 \equiv 0, \quad 1 \wedge 1 \equiv 1.$

En las fórmulas anteriores se ha utilizado el signo de equivalencia entre proposiciones. La equivalencia $\alpha \equiv \beta$ significa que las proposiciones α y β tienen los mismos valores lógicos.

La disyunción y la conjunción de proposiciones (llamadas también suma lógica $\alpha + \beta$ y producto lógico $\alpha \cdot \beta$) son conmutativas y asociativas, es decir,

(3) $$\alpha \vee \beta \equiv \beta \vee \alpha, \qquad \alpha \wedge \beta \equiv \beta \wedge \alpha,$$
$$\alpha \vee (\beta \vee \gamma) \equiv (\alpha \vee \beta) \vee \gamma, \qquad \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) \equiv (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma.$$

La ley distributiva también es válida:

(4) $$\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) \equiv (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$$

y más generalmente, se tiene

(5) $(\alpha \vee \beta) \wedge (\gamma \vee \delta) \equiv (\alpha \wedge \gamma) \vee (\beta \wedge \gamma) \vee (\alpha \wedge \delta) \vee (\beta \wedge \delta).$

Podemos verificar las anteriores leyes, e igualmente todas las fórmulas del cálculo proposicional, poniendo los valores 0 y 1 en vez de las variables y aplicando luego las fórmulas (1) y (2).

1.2. Negación

Vamos ahora a introducir la operación de *negación* de una proposición α, que indicaremos por α' (o por $\sim \alpha$). La negación de una proposición verdadera es una proposición falsa y, inversamente, la negación de una proposición falsa es una proposición verdadera. Por tanto, tendremos la siguiente tabla:

(6) $$1' \equiv 0, \quad 0' \equiv 1.$$

De esto resulta la llamada *ley de doble negación:*

(7) $$\alpha'' \equiv \alpha.$$

Dos teoremas fundamentales de la lógica aristotélica se deducen fácilmente de las fórmulas (1), (2) y (6), a saber:

(8) $$\alpha \vee \alpha' \equiv 1, \quad \alpha \wedge \alpha' \equiv 0;$$

es decir, la *ley del tercio excluso* y la *ley de no contradicción*, que en la lógica clásica se formulan así: de dos proposiciones contradictorias, una es verdadera; ninguna proposición puede ser verdadera simultáneamente con su negación.

Además, son válidas las importantes *leyes de De Morgan*

(9) $$(\alpha \vee \beta)' \equiv (\alpha' \wedge \beta'),$$

(10) $$(\alpha \wedge \beta)' \equiv (\alpha' \vee \beta').$$

La primera de estas leyes afirma que si no es verdad que una de las proposiciones α, β sea cierta, entonces ambas son falsas (y recíprocamente); es decir; que la negación de la primera, como también la negación de la segunda, son proposiciones verdaderas.

Análogamente, si no es verdad que ambas proposiciones α, β, son ciertas, esto supone que la negación de una de las dos es una proposición verdadera, y recíprocamente.

Tomando la negación de ambos miembros de la identidad (10) obtenemos, en virtud de la fórmula (7), la identidad:

(11) $$\alpha \wedge \beta \equiv (\alpha' \vee \beta')'.$$

De esto resulta que la conjunción puede definirse mediante la disyunción y negación (desde luego, también de una manera similar se podría definir la disyunción con la ayuda de la conjunción y la negación). Esto permite reducir a dos el número de las operaciones fundamentales; no obstante, desde el punto de vista de la técnica del cálculo es más conveniente hacer uso de tres operaciones: disyunción, conjunción y negación.

1.3. Implicación

Escribimos $\alpha \Rightarrow \beta$ si la proposición $\alpha' \vee \beta$ es verdadera, es decir,

(12) $$(\alpha \Rightarrow \beta) \equiv (\alpha' \vee \beta).$$

$\alpha \Rightarrow \beta$ se lee: la proposición α *implica* la proposición β, o: *si* α, *entonces* β.

De las tablas (1) y (6) resulta la siguiente:

(13) $$(0 \Rightarrow 0) \equiv 1, \quad (0 \Rightarrow 1) \equiv 1, \quad (1 \Rightarrow 0) \equiv 0, \quad (1 \Rightarrow 1) \equiv 1.$$

También deducimos de esto que

(14) $$\textit{Si} \quad \alpha \Rightarrow \beta \quad \textit{y} \quad \beta \Rightarrow \alpha, \quad \textit{entonces} \quad \alpha \equiv \beta.$$

Evidentemente, la implicación tiene propiedades análogas a la deducción. Sin embargo el significado corriente de la palabra «deducción» es diferente del de la palabra «implicación». Decir que una proposición β se deduce de una proposición α (es decir, de un teorema dado) expresa usualmente la posibilidad de demostrar la proposición β basándose en la proposición α, mientras que la implicación $\alpha \Rightarrow \beta$ es legítima siempre que la proposición β sea verdadera (aunque la proposición α sea falsa).

Damos a continuación otras dos leyes fácilmente demostrables: la *ley del silogismo* (o ley de transitividad de la implicación) y la *ley de contraposición* (de la cual depende el método de demostración por reducción al absurdo):

(15) $$\textit{si} \quad \alpha \Rightarrow \beta \quad \textit{y} \quad \beta \Rightarrow \gamma, \quad \textit{entonces} \quad \alpha \Rightarrow \gamma;$$

(16) $$\textit{si} \quad \beta' \Rightarrow \alpha', \quad \textit{entonces} \quad \alpha \Rightarrow \beta.$$

EJERCICIOS

1. Demostrar que si α es una proposición cierta, también lo es la proposición $\beta \Rightarrow \alpha$. [*Sugerencia:* En este ejercicio y los que siguen aplicar las tablas del «cero-uno» (1), (2), (6) y (13)].

2. Si $\alpha' \Rightarrow \beta$ para todo β, entonces la proposición α es cierta. *(Ley de Clausius.)*

3. Si α es falsa, entonces $\alpha \Rightarrow \beta$. *(Ley de Duns Scoto.)*

4. Demostrar que $\alpha \wedge \beta \Rightarrow \alpha \Rightarrow \alpha \vee \beta$.

5. Si $\alpha \Rightarrow \beta$ y $\gamma \Rightarrow \delta$, entonces $\alpha \wedge \gamma \Rightarrow \beta \wedge \delta$ y $\alpha \vee \gamma \Rightarrow \beta \vee \delta$.
6. Si $\alpha \Rightarrow \beta$, entonces $\alpha \wedge \beta \equiv \alpha$ y $\alpha \vee \beta \equiv \beta$.
7. Demostrar que $\alpha \vee (\alpha \wedge \beta) \equiv \alpha \equiv \alpha \wedge (\alpha \vee \beta)$. *(Ley de absorción.)*
8. Sea $(\alpha \dot{-} \beta) \equiv [(\alpha \wedge \beta') \vee (\alpha' \wedge \beta)]$. Demostrar que

$$(\alpha \vee \beta) \equiv [(\alpha \dot{-} \beta) \dot{-} (\alpha \wedge \beta)].$$

A $\alpha \dot{-} \beta$ se le llama *diferencia simétrica* de las dos proposiciones α y β. ¿Cuál es su significado lógico?

CAPÍTULO **2**

Álgebra de conjuntos. Operaciones finitas

2.1. Operaciones con conjuntos

La *unión* (o *suma* de la Teoría de conjuntos) de dos conjuntos A y B se define como el conjunto cuyos elementos son, sin más, todos los elementos del conjunto A y todos los elementos del conjunto B. Representaremos la unión de los conjuntos A y B por el símbolo $A \cup B$ (o por $A + B$).

La *intersección* (o *producto* de la Teoría de conjuntos) de dos conjuntos A y B se define como la parte común de ambos conjuntos, es decir, es el conjunto constituido por aquellos elementos, y sólo aquellos, que pertenecen simultáneamente a A y a B. Representaremos la intersección de los conjuntos A y B por el símbolo $A \cap B$ (o por $A \cdot B$).

Finalmente, la *diferencia* de dos conjuntos A y B, es decir, el conjunto $A - B$, es el conjunto constituido, sin más, por los elementos que pertenecen a A pero que no pertenecen a B (en vez de $A - B$ se usan también los símbolos $A \setminus B$ y $A \sim B$).

Los ejemplos siguientes ilustran las operaciones entre conjuntos: la unión del conjunto de los números racionales y del conjunto de los irracionales es el conjunto de todos los números reales; la intersección del conjunto de los números enteros divisibles por 2 y el conjunto de los enteros divisibles por 3 es el conjunto de los enteros divisibles por 6; la diferencia del conjunto de los números naturales y el conjunto de números naturales pares es el conjunto de los números naturales impares.

Otros ejemplos se ofrecen en las figuras 1 a 3, en donde A y B son los conjuntos de puntos de ciertos círculos. En la figura 2 se ve que no existe ningún punto que pertenezca a ambos conjuntos A y B; pero, a pesar de esto, podemos considerar que la intersección es posible en todos los casos adoptando la siguiente definición.

Conjunto nulo (o *conjunto vacío*) es el conjunto que no contiene elementos; lo representamos por el símbolo $\emptyset$.

Así, pues, en la figura 2 tenemos $A \cap B = \emptyset$ y en la figura 3 tenemos $B - A = \emptyset$.

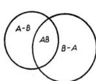


Fig. 1

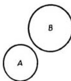


Fig. 2

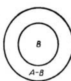


Fig. 3

La igualdad $A \cap B = \emptyset$ significa, pues, que los conjuntos A y B no tienen elementos comunes. Entonces decimos que estos conjuntos son *disjuntos*.

El papel del conjunto nulo en la teoría de conjuntos es análogo al del número 0 en Aritmética; son conceptos necesarios para que sea posible realizar las operaciones sin casos de excepción.

2.2. Analogías con el cálculo proposicional

Las operaciones entre conjuntos están estrechamente relacionadas con las operaciones entre proposiciones. Escribir $x \in A$ indica que x es un elemento del conjunto A (de ordinario indicaremos los elementos con letras minúsculas y los conjuntos con letras mayúsculas); entonces tendremos las equivalencias siguientes (válidas para todo x):

(1) $$[x \in (A \cup B)] \equiv (x \in A) \vee (x \in B),$$

(2) $$[x \in (A \cap B)] \equiv (x \in A) \wedge (x \in B),$$

(3) $$[x \in (A - B)] \equiv (x \in A) \wedge (x \in B)'.$$

En virtud de las fórmulas (1), (2) y (3) podemos deducir fácilmente los teoremas del cálculo de conjuntos de los teoremas análogos del cálculo proposicional.

En esta correlación observemos que

(4) *si la equivalencia* $x \in A \equiv x \in B$ *vale para todo* x, *entonces* $A = B$.

Por tanto, la demostración de la igualdad $A = B$ se reduce a probar que x pertenece a A si y sólo si pertenece a B.

Las operaciones de unión e intersección de conjuntos son conmutativas:

(5) $$A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A.$$

Estas operaciones también satisfacen la ley asociativa:

(6) $$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C,$$
$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$$

La ley distributiva,

(7) $$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$$

se cumple también, como puede probarse fácilmente.

De aquí se deduce que

(8) $$(A \cup B) \cap (C \cup D) = (A \cap C) \cup (B \cap C) \cup (A \cap D) \cup (B \cap D),$$

pues, en virtud de la fórmula (7), es

$$(A \cup B) \cap (C \cup D) = [(A \cup B) \cap C] \cup [(A \cup B) \cap D] =$$
$$= (A \cap C) \cup (B \cap C) \cup (A \cap D) \cup (B \cap D).$$

Por consiguiente, en general, como en Aritmética, para desarrollar la intersección de dos uniones se debe hacer la intersección de cada término de la primera unión con cada término de la segunda unión y después formar la unión de las intersecciones así obtenidas.

La analogía entre la Aritmética y la Teoría de conjuntos no es, sin embargo, completa. Por ejemplo, en la Teoría de conjuntos valen las siguientes fórmulas evidentes:

(9) $$A \cup A = A,$$

(10) $$A \cap A = A,$$

las que indican, en contraste con la Aritmética, que ni los múltiplos ni las potencias de A aparecen en la Teoría de conjuntos.

2.3. Inclusión

Vamos ahora a introducir la importante relación de *inclusión* entre conjuntos. Diremos que el conjunto A es un *subconjunto* del conjunto B (o también que el conjunto A está *contenido* en B) si cada uno de los elementos del conjunto A es elemento del conjunto B. Entonces escribiremos $A \subset B$ (o $B \supset A$).

Por tanto, tendremos la siguiente equivalencia lógica:

(11) $(A \subset B) \equiv$ [*la implicación* $(x \in A) \Rightarrow (x \in B)$, *es válida para todo* x].

En particular, se sigue de esto que:

(12) $$A \subset A,$$

es decir, que todo conjunto es subconjunto de sí mismo. Por esta razón también usamos el término *subconjunto propio* para indicar los subconjuntos de un conjunto dado que son distintos de él. Obviamente:

(13) *Si* $A \subset B$ *y* $B \subset A$, *entonces* $A = B$,

pues los conjuntos A y B en este caso están constituidos por los mismos elementos.

Por lo tanto, para demostrar que $A = B$, basta demostrar que $A \subset B$ y $B \subset A$; en otras palabras, para establecer la equivalencia

$$(x \in A) \equiv (x \in B)$$

basta probar las dos implicaciones

$$x \in A \Rightarrow x \in B \quad \text{y} \quad x \in B \Rightarrow x \in A.$$

(Cfr. Cap. 1.3 (14)).

Se puede demostrar fácilmente que

(14) *Si* $A \subset B$ *y* $B \subset C$, *entonces* $A \subset C$,

(15) $(A \cap B) \subset A \subset (A \cup B)$, $\quad A - B \subset A$,

(16) *Si* $A \subset B$ *y* $C \subset D$, *entonces* $(A \cup C) \subset (B \cup D)$

y $(A \cap C) \subset (B \cap D)$.

Vamos ahora a establecer las siguientes equivalencias:

(17) $(A \subset B) \equiv (A \cup B = B) \equiv (A \cap B = A)$.

Sea primero $A \subset B$. Combinando esta inclusión con la inclusión $B \subset B$, obtendremos, en virtud de (16) y (9):

$$(A \cup B) \subset (B \cup B) = B,$$

pero puesto que, según (15), $B \subset (A \cup B)$, tendremos $A \cup B = B$ [Cfr. (13)].

Recíprocamente, de la relación $A \cup B = B$ se sigue que $A \subset B$ (según (15)): por tanto, ambas relaciones son equivalentes.

Análogamente, combinando la inclusión $A \subset B$ con la inclusión $A \subset A$, obtenemos $A \subset (A \cap B)$, de donde $A = A \cap B$ ya que $A \cap B \subset A$ en virtud de (15).

Recíprocamente, de la relación $A \cap B = A$ obtenemos la relación $A \subset B$ porque $(A \cap B) \subset B$.

De esto se obtiene la siguiente fórmula que es importante en las aplicaciones:

(18) $(A \cup B) \cap (A \cup C) = A \cup (B \cap C)$.

En efecto, por (8) y (10) tenemos:

$$(A \cup B) \cap (A \cup C) = (A \cap A) \cup (B \cap A) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C) =$$
$$= A \cup (B \cap A) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C),$$

la cual da $(B \cap A) \subset A$ por (15), y de aquí, por (17), que $A \cup (B \cap A) = A$ y análogamente que $A \cup (A \cap C) = A$. De esto sigue sin más la fórmula (18).

Podemos añadir aquí las siguientes fórmulas, cuya demostración no tiene ninguna dificultad:

(19) $$A \cap B = A - (A - B),$$

(20) $$A \cup (B - A) = A \cup B,$$

(21) $$A - (A \cap B) = A - B,$$

(22) $$A \cap (B - C) = (A \cap B) - C.$$

2.4. Espacio. Complemento de un conjunto

En las aplicaciones de la Teoría de conjuntos se supone, como regla general, que todos los conjuntos que consideremos son subconjuntos de un cierto conjunto llamado *espacio*. Por ejemplo, en Análisis matemático el conjunto de los números reales forma un espacio, y otro, también, el conjunto de los números complejos; y en Geometría tenemos un ejemplo inicial con el concepto de espacio euclídeo.

Con esta suposición, los teoremas del álgebra de conjuntos toman una formulación aun más simple, que las aproxima más al cálculo con funciones proposicionales.

En efecto, indiquemos por 1 el espacio dado (esta notación es cómoda desde el punto de vista del cálculo). Con esto tendremos $A \subset 1$ para todos los conjuntos A considerados. Se indicará por A^c (o por $\sim A$) el conjunto de elementos del espacio que no pertenece a A, es decir,

$$A^c = 1 - A.$$

A^c se llama *complemento* del conjunto A (con respecto al espacio 1 dado). Por tanto, tenemos:

(23) $$x \in A^c \equiv (x \in A)'$$

o, si escribimos $x \notin A$ en lugar de $(x \in A)'$,

$$x \in A^c \equiv x \notin A.$$

Las fórmulas (6)-(8) (Cap. 1.2) dan inmediatamente las fórmulas, casi obvias,

(24) $$1^c = \emptyset, \quad \emptyset^c = 1,$$

(25) $$A^{cc} = A,$$

(26) $$A \cup A^c = 1, \quad A \cap A^c = \emptyset.$$

Las fórmulas (3), (23) y (2) implican la fórmula

(27) $$A - B = A \cap B^c$$

la cual nos permite definir la sustracción mediante la intersección y la complementación.

En efecto:

$$(x \in A - B) \equiv (x \in A) \wedge (x \in B)' \equiv (x \in A) \wedge (x \in B^c) \equiv (x \in A \cap B^c).$$

La fórmula (16) (Cap. 1.3), implica que

(28) $$si \quad B^c \subset A^c, \quad entonces \quad A \subset B.$$

Finalmente, las fórmulas (9) y (10) (Cap. 1.2) dan las leyes de Morgan para conjuntos:

(29) $$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c,$$

(30) $$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c.$$

Efectivamente, se tiene:

$$x \in (A \cup B)^c \equiv [x \in (A \cup B)]' \equiv [(x \in A) \vee (x \in B)]' \equiv (x \in A^c) \wedge (x \in B^c) \equiv x \in (A^c \cap B^c).$$

La demostración de la fórmula (30) es análoga.

La fórmula evidente

(31) $$A \cap 1 = A$$

da, por (26), que

(32) $$A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c).$$

por cuanto

$$A = A \cap 1 = A \cap (B \cup B^c) = (A \cap B) \cup (A \cap B^c).$$

La fórmula (17) puede completarse con la siguiente equivalencia, que es de frecuente aplicación en la práctica:

(33) $$(A \subset B) \equiv (A \cap B^c = \emptyset).$$

En efecto, formando la intersección con B^c de los dos miembros de la inclusión $A \subset B$, obtenemos $A \cap B^c \subset (B \cap B^c) = \emptyset$ (por (26)). Pero por la fórmula (32) deducimos, supuesta la igualdad $A \cap B^c = \emptyset$, que $A = A \cap B$ y por consiguiente, por (17), se sigue que $A \subset B$.

2.5. Los axiomas del álgebra de conjuntos

En las consideraciones hechas hasta aquí hemos utilizado sólo algunas propiedades de los conjuntos. Estas propiedades pueden presentarse como

un sistema de axiomas de los que se deducen los teoremas explicados de la Teoría de conjuntos.

Tomemos, particularmente, como *conceptos primitivos* el concepto de conjunto y la relación de pertenecer un elemento a un conjunto, es decir, la relación $x \in A$.

Admitimos los cuatro axiomas siguientes:

I. Axioma de unicidad. *Si los conjuntos A y B tienen los mismos elementos, ambos conjuntos son idénticos.*

II. Axioma de unión. *Para dos conjuntos A y B arbitrarios, hay un conjunto cuyos elementos son todos los elementos de A y todos los de B y que no contiene ningún otro elemento.*

III. Axioma de diferencia. *Para dos conjuntos A y B arbitrarios, hay un conjunto cuyos elementos son aquellos y sólo aquellos del conjunto A que no son elementos del conjunto B.*

IV. Axioma de existencia. *Existe al menos un conjunto.*

No es necesario dar un axioma de la existencia de la intersección, pues sabemos (fórmula (19)) que la intersección puede definirse mediante la diferencia. La existencia del conjunto vacío es también, una consecuencia de nuestro sistema de axiomas, pues puede definirse el conjunto vacío por medio de la fórmula $\emptyset = A - A$, donde A es un conjunto arbitrario (la existencia de al menos un conjunto está garantizada por el axioma IV).

Una consecuencia importante del axioma I es la unicidad de las operaciones, es decir, que para dos conjuntos dados A y B existe solamente un conjunto que satisface el axioma II (lo cual justifica el uso del símbolo $A \cup B$ para designar ese conjunto); lo mismo se aplica a la intersección y diferencia.

Como hemos explicado antes, es posible deducir todos los teoremas de la teoría de conjuntos considerados hasta ahora, a partir de los axiomas dados, sin apoyarse para nada en el concepto intuitivo de conjunto.

2.6. Álgebra booleana

Daremos ahora otro método para axiomatizar el concepto de álgebra de conjuntos.

Tomando primeramente como conceptos primitivos el conjunto $\emptyset$ y las operaciones $\cup$, $\cap$, $-$, formularemos los siguientes axiomas:

(1.°) $A \cup B = B \cup A$, (2.°) $A \cap B = B \cap A$,

(3.°) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$,

(4.°) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$,

(5.°) $A \cup \emptyset = A$,

(6.°) $$A \cup (A \cap B) = A,$$

(7.°) $$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$$

(8.°) $$A \cap (A \cup B) = A,$$

(9.°) $$(A - B) \cup B = A \cup B,$$

(10.°) $$(A - B) \cap B = \emptyset.$$

Mediante estos axiomas podremos deducir todos los teoremas del álgebra de conjuntos en los que no aparezca la relación ϵ. También, si deseamos restringir el dominio de las variables a los subconjuntos de un conjunto fijo 1, añadiremos el axioma:

(11.°) $$A \cap 1 = A.$$

Ahora, además, definiremos la inclusión con la ayuda de la fórmula (cfr. (17)):

$$(A \subset B) \equiv (A \cup B = B).$$

A la teoría desarrollada a partir de los anteriores axiomas se le llama *álgebra booleana*.

Las aplicaciones del álgebra booleana se extienden más allá de la Teoría de conjuntos; no es forzoso interpretar las variables A, B..., como conjuntos. Interpretándolos, por ejemplo, como proposiciones, obtendremos el cálculo proposicional.

Esto explica la dualidad entre el cálculo proposicional y el álgebra de conjuntos: a la disyunción (o suma) $\vee$ de las proposiciones corresponde la unión (o suma) $\cup$ de conjuntos; a la conjunción (producto) $\wedge$ de las proposiciones, la intersección (producto) $\cap$ de conjuntos; a la negación α' de una proposición α, el complemento A^c de un conjunto A, etc. (ver el Cap. 4.3).

Otras interpretaciones recientes del álgebra booleana han permitido aplicarla en varias ramas de las Matemáticas y también fuera de las Matemáticas (por ejemplo, en la teoría de las redes eléctricas).

EJERCICIOS

1. Demostrar las fórmulas siguientes:

(a) $$A \cup (A \cap B) = A = A \cap (A \cup B),$$

(b) $$(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C),$$

(c) $$A - (B - C) = (A - B) \cup (A \cap C),$$

(d) $$A - (B \cup C) = (A - B) - C.$$

2. El conjunto

$$A \dot{-} B = (A - B) \cup (B - A)$$

se llama diferencia simétrica de los conjuntos A y B. Demostrar las siguientes fórmulas:

(a) $A \dot{-} (A \dot{-} C) = (A \dot{-} B) \dot{-} C$ (asociatividad),

(b) $A \cap (B \dot{-} C) = A \cap B \dot{-} A \cap C$ (distributividad),

(c) $A \cup B = A \dot{-} B \dot{-} A \cap B$,

(d) $A - B = A \dot{-} A \cap B$.

3. Se dice que las operaciones $x + y$ y $x \cdot y$ forman un anillo si quedan satisfechas las siguientes condiciones:

(i) $x + y = y + x$,

(ii) $x + (y + z) = (x + y) + z$,

(iii) existe un elemento 0 tal que $x + 0 = x$,

(iv) cualquiera que sea el par de elementos x, y, existe un elemento $z(z = x - y)$ tal que $y + z = x$,

(v) $x \cdot y = y \cdot x$,

(vi) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$,

(vii) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

Demostrar que los conjuntos forman un anillo respecto a las operaciones $A \dot{-} B$ y $A \cap B$, pero que no constituyen anillo con respecto a las operaciones $A \cup B$ y $A \cap B$.

4. Definimos la división mediante la fórmula $A : B = A \cup B^c$. Calcular

$$A : (B \cap C), \qquad A : (B \cup C), \qquad A \cap (B : A).$$

5. Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n$, subespacios dados del espacio 1. Pongamos $A_i^1 = 1 - A_i$, $A_i^0 = A_i$. Toda intersección de la forma

$$A_1^{i_1} \cap A_2^{i_2} \cap \ldots \cap A_n^{i_n}, \qquad \text{en donde} \qquad i_j = 0 \quad \text{o} \quad 1,$$

se llama un *constituyente* del espacio (relativo a los conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$).

Probar que los constituyentes son disjuntos y que su unión es igual a 1. (Por consiguiente, la descomposición en constituyentes realiza una clasificación de los elementos del espacio respecto a su pertenencia a los conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$).

6. Representar el conjunto $A - (B - C)$ como unión de constituyentes del espacio relativos a los conjuntos A, B, C.

7. Sea A el conjunto obtenido a partir del sistema finito de conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ligándolos entre sí de manera arbitraria mediante la diferencia simétrica. Demostrar que A es el conjunto de los elementos que pertenecen a un número impar de conjuntos $A_1, \ldots, A_n$. (Así, el conjunto A es independiente del orden en el que se realicen las operaciones para formularlo).

CAPÍTULO **3**

Funciones proposicionales
Productos cartesianos

Sea un conjunto fijo dado, al que en lo sucesivo consideraremos como la totalidad de un cierto espacio. Sea $\varphi(x)$ una expresión que se convierte en una proposición cuando se sustituye x por un valor particular arbitrario, elemento del espacio considerado. Llamaremos a esta expresión *función proposicional* (definida en un conveniente dominio del argumento; a veces consideraremos funciones proposicionales en las que el dominio de la variación de la variable x no debe restringirse en absoluto).

Por ejemplo, si el espacio es el conjunto de todos los números reales, entonces la expresión $x > 0$ es una función proposicional; se obtiene una proposición verdadera si sustituímos x por 1; se obtiene una proposición falsa si sustituímos x por -1.

3.1. La operación E

El conjunto de valores de la variable x para los que $\varphi(x)$ es una proposición verdadera (o, como también se dice, el conjunto de valores de x que satisfacen a la proposición funcional $\varphi(x)$) se denota por el símbolo

$$\mathbf{E}_x\varphi(x),$$

o por $\{x : \varphi(x)\}$.

Por ejemplo, en el espacio de los números reales, $\mathbf{E}_x(x > 0)$ es el conjunto de todos los números positivos; $\mathbf{E}_x(x = x)$ es el conjunto de todos los números reales; y $\mathbf{E}_x(x + 1 = x)$ es el conjunto vacío.

En consecuencia, por la definición de la operación E, la condición necesaria y suficiente para que el elemento a pertenezca al conjunto $\mathbf{E}_x\varphi(x)$

es que la proposición $\varphi(a)$ sea verdadera; por tanto se tiene la equivalencia siguiente:

(1) $$\text{para todo } a: \ [a \in \mathbf{E}_x\varphi(x)] \equiv \varphi(a).$$

Son válidas las fórmulas siguientes:

(2) $$\mathbf{E}_x[\varphi(x) \vee \psi(x)] = \mathbf{E}_x\varphi(x) \cup \mathbf{E}_x\psi(x),$$

(3) $$\mathbf{E}_x[\varphi(x) \wedge \psi(x)] = \mathbf{E}_x\varphi(x) \cap \mathbf{E}_x\psi(x),$$

(4) $$\mathbf{E}_x[\varphi(x) \wedge \{\psi(x)\}'] = \mathbf{E}_x\varphi(x) - \mathbf{E}_x\psi(x),$$

(5) $$\mathbf{E}_x[\varphi(x)]' = [\mathbf{E}_x\varphi(x)]^c.$$

La demostración de la fórmula (2) se obtiene de la fórmula (1) anterior y de la fórmula (1) del Capítulo 2.2:

$$a \in \mathbf{E}_x[\varphi(x) \vee \psi(x)] \equiv [\varphi(a) \vee \psi(a)]$$
$$\equiv [a \in \mathbf{E}_x\varphi(x)] \vee [a \in \mathbf{E}_x\psi(x)] \equiv a \in [\mathbf{E}_x\varphi(x) \cup \mathbf{E}_x\psi(x)],$$

de donde sigue la igualdad (2) (Cfr. Cap. 2.2 (4)).

Las fórmulas (3)-(5) se demuestran análogamente.

3.2. Cuantificadores

Consideraremos ahora las dos operaciones siguientes entre funciones proposicionales:

$$\bigvee_x\varphi(x) \quad \text{y} \quad \bigwedge_x\varphi(x).$$

La fórmula $\bigvee_x\varphi(x)$ se lee como sigue: existe *algún* x que satisface la función $\varphi(x)$; y $\bigwedge_x\varphi(x)$ se lee: *todo* x satisface a la función $\varphi(x)$. Otros símbolos para indicar esto mismo son: $\exists_x$, Σ_x, en vez de $\bigvee_x$; y $\forall_x$, Π_x, en vez de $\bigwedge_x$.

Es claro que las operaciones anteriores transforman las funciones proposicionales en proposiciones. Los símbolos de estas operaciones, $\bigvee$ y $\bigwedge$, se llaman el cuantificador *existencial* y el cuantificador *universal*, respectivamente.

Por ejemplo, en el espacio de los números reales la proposición $\bigvee_x(x > 0)$ es verdadera, pero la proposición $\bigwedge_x(x > 0)$ es falsa.

La variable x que aparece como la variable independiente en la función proposicional $\varphi(x)$ se convierte en variable sorda (*) en la proposición $\bigvee_x\varphi(x)$ (análogamente a la x en $\int_0^1 f(x)dx$). Puede notarse, en efecto, que

$$\bigvee_x\varphi(x) \equiv \bigvee_y\varphi(y).$$

(*) La denominación de sorda para una variable cuyo nombre puede cambiarse sin alterar el significado o valor de la expresión en que aparece, se debe a Eddington. — *N. del T.*

Análoga observación puede hacerse sobre el cuantificador universal.

Las operaciones $\bigvee$ y $\bigwedge$ pueden considerarse como generalizaciones de las operaciones de disyunción y conjunción. Pues si el dominio de variación de x es finito, constando de los elementos $a_1, a_2, \ldots, a_n$, entonces,

(6) $$\bigvee_x \varphi(x) \equiv [\varphi(a_1) \vee \varphi(a_2) \vee \ldots \vee \varphi(a_n)],$$
$$\bigwedge_x \varphi(x) \equiv [\varphi(a_1) \wedge \varphi(a_2) \wedge \ldots \wedge \varphi(a_n)].$$

He aquí, ahora, algunas fórmulas fácilmente demostrables:

(7) *para cualquier* x_0 *se tiene:* $[\bigwedge_x \varphi(x)] \Rightarrow \varphi(x_0) \Rightarrow [\bigvee_x \varphi(x)]$,

(8) $$[\bigvee_x \varphi(x) \vee \bigvee_x \psi(x)] \equiv \bigvee_x [\varphi(x) \vee \psi(x)],$$

(9) $$\bigvee_x [\varphi(x) \wedge \psi(x)] \Rightarrow \bigvee_x \varphi(x) \wedge \bigvee_x \psi(x).$$

Nótese que en la fórmula (9) no se puede reemplazar el signo de implicación por el signo de equivalencia; en otras palabras, la implicación en el sentido contrario no puede asegurarse. Por ejemplo las dos proposiciones:

$\bigvee_x$ (x es un número positivo) y

$\bigvee_x$ (x es un número negativo),

son verdaderas, luego, también es verdad el segundo miembro de la fórmula (9); pero en el primer miembro aparece, en este ejemplo, una proposición falsa (puesto que no hay ningún número que sea simultáneamente positivo y negativo).

Los duales de las fórmulas (8) y (9) son los siguientes:

(10) $$[\bigwedge_x \varphi(x) \wedge \bigwedge_x \psi(x)] \equiv \bigwedge_x [\varphi(x) \wedge \psi(x)],$$

(11) $$[\bigwedge_x \varphi(x) \vee \bigwedge_x \psi(x)] \Rightarrow \bigwedge_x [\varphi(x) \vee \psi(x)].$$

Esta dualidad está expresada por la *generalización de las fórmulas de Morgan* (que aparece muy frecuentemente en las aplicaciones):

(12) $$[\bigwedge_x \varphi(x)]' \equiv \bigvee_x \varphi'(x),$$

(13) $$[\bigvee_x \varphi(x)]' \equiv \bigwedge_x \varphi'(x).$$

Como en el caso de las operaciones finitas, las fórmulas de Morgan permiten la definición del cuantificador universal en función del cuantificador existencial y la negación (y la del cuantificador existencial en función del cuantificador universal y la negación):

(14) $$\bigwedge_x \varphi(x) \equiv (\bigvee_x \varphi'(x))', \quad \bigvee_x \varphi(x) \equiv (\bigwedge_x \varphi'(x))'.$$

Nota. Además de los símbolos $\bigvee_x$ y $\bigwedge_x$ se utilizan los símbolos más complicados $\bigvee_{\psi(x)}$ y $\bigwedge_{\psi(x)}$, en donde $\psi(x)$ es una función proposicional dada Se definen así:

$$\bigvee_{\psi(x)} \varphi(x) \equiv \bigvee_x [\psi(x) \wedge \varphi(x)],$$
$$\bigwedge_{\psi(x)} \varphi(x) \equiv \bigwedge_x [\psi(x) \Rightarrow \varphi(x)].$$

Análogamente, se tiene

$$E_{\psi(x)}\varphi(x) = E_x[\psi(x) \wedge \varphi(x)].$$

3.3. Pares ordenados

El conjunto constituido por un solo elemento se indicará mediante el símbolo $\{a\}$. (Nótese que $\{a\} \neq a$). El conjunto formado por dos elementos a y b se designan por $\{a, b\}$; análogamente, $\{a, b, c\}$ indica el conjunto constituido por los elementos a, b y c.

Obviamente los símbolos $\{a, b\}$ y $\{b, a\}$ indican el mismo conjunto. En lo que sigue necesitaremos el concepto de *par ordenado*, con un elemento antecedente a y un siguiente b, que denotaremos por el símbolo $\langle a, b \rangle$. Consideramos el par $\langle a, b \rangle$ como distinto del par $\langle b, a \rangle$, excepto si $a = b$; más generalmente, los pares $\langle a, b \rangle$ y $\langle c, d \rangle$ son iguales sólo cuando $a = c$ y $b = d$, es decir, cuando tienen los elementos antecedentes idénticos y los elementos siguientes también idénticos:

(15) $$[\langle a, b \rangle = \langle c, d \rangle] \Rightarrow (a = c) \wedge (b = d).$$

El concepto del par ordenado puede definirse de varios modos; podemos adoptar, por ejemplo, la siguiente definición:

(16) $$\langle a, b \rangle = \{\{a\}, \{a, b\}\}.$$

Se demuestra fácilmente que la condición (15) se satisface con la definición (16).

3.4. Producto cartesiano

Producto cartesiano de dos conjuntos X e Y es el conjunto de todos los pares ordenados $\langle x, y \rangle$, con $x \in X$ e $y \in Y$. Denotaremos este conjunto por $X \times Y$, es decir:

(17) $$[\langle x, y \rangle \in (X \times Y)] \equiv (x \in X) \wedge (y \in Y).$$

Los productos cartesianos aparecen muy frecuentemente en las Matemáticas. Por ejemplo, el plano de los números complejos $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ donde $\mathcal{C}$ es la recta o conjunto de todos los números reales. Un cilindro puede considerarse como el producto cartesiano de la circunferencia de un círculo (base) por un segmento rectilíneo (altura); la superficie de un toro (*) puede considerarse como el producto cartesiano de dos círculos.

Escribimos a continuación varias fórmulas fácilmente demostrables, concernientes a la ley distributiva del producto cartesiano con respecto a las operaciones del álgebra de conjuntos.

(*) Se llama *toro* a la figura de revolución engendrada por un círculo que gira alrededor de una recta coplanaria exterior. — *N. del T.*

(18) $$(X_1 \cup X_2) \times Y = X_1 \times Y \cup X_2 \times Y,$$

de donde:

(19) $$(X_1 \cup X_2) \times (Y_1 \cup Y_2) = X_1 \times Y_1 \cup X_1 \times Y_2 \cup X_2 \times Y_1 \cup X_2 \times Y_2,$$

(20) $$(X_1 - X_2) \times Y = X_1 \times Y - X_2 \times Y,$$

(21) $$(X_1 \cap X_2) \times (Y_1 \cap Y_2) = (X_1 \times Y_1) \cap (X_2 \times Y_2).$$

Si los conjuntos X_1, X_2, Y_1 e Y_2 no son vacíos se tiene:

(22) $$[(X_1 \times Y_1) = (X_2 \times Y_2)] \Rightarrow (X_1 = X_2) \cap (Y_1 = Y_2).$$

Todas las fórmulas anteriores tienen una fácil interpretación geométrica, si suponemos que $X \times Y$ es el plano con ejes cartesianos X e Y y que $X_1 \subset X$, $X_2 \subset X$, $Y_1 \subset Y$, $Y_2 \subset Y$.

Análogamente, tienen una clara interpretación geométrica las fórmulas siguientes:

(23) $$A \times B = (A \times Y) \cap (X \times B),$$

(24) $$(A \times B)^c = (A^c \times Y) \cup (X \times B^c),$$

en donde $A \subset X$, $B \subset Y$ y A^c, B^c denotan los complementos con respecto a X, Y, respectivamente, y $(A \times B)^c$ indica el complemento con respecto a $X \times Y$.

La fórmula (23) se deduce de la (21), y la (24) sigue de la (23), en virtud de las leyes de Morgan, ya que:

$$(A \times Y) \cap (X \times B) = (A \cap X) \times (Y \cap B) = A \times B,$$
$$(A \times Y)^c = (A^c \times Y) \quad \text{y} \quad (X \times B)^c = (X \times B^c).$$

3.5. Funciones proposicionales de dos variables

Sea el producto cartesiano $Z = X \times Y$ dado. Sea una función proposicional de la variable z, sobre el conjunto Z. Ya que $z = \langle x, y \rangle$, la función proposicional $\varphi(z)$ puede ser considerada como una *función de dos variables* x e y; escribimos $\varphi(x, y)$ en vez de $\varphi(\langle x, y \rangle)$. Una función proposicional de dos variables se llama también *relación* (en el sentido lógico).

Una función proposicional de dos variables sobre los espacios X e Y es lo mismo que una función proposicional de una variable sobre el producto cartesiano de estos espacios.

En lugar de $\mathbf{E}_z\varphi(z)$ también escribimos $\mathbf{E}_{x,y}\varphi(x, y)$. Por ejemplo $\mathbf{E}_{x,y}(x < y)$ es el semiplano situado sobre la recta $x = y$ y $\mathbf{E}_{x,y}(y = x^2)$ es la parábola de ecuación $y = x^2$.

Sea $\varphi(x, y)$ una cierta función proposicional de dos variables. Entonces $\bigvee_y \varphi(x, y)$ y $\bigwedge_y \varphi(x, y)$ serán funciones proposicionales de una sola variable, esto es, de la variable x.

Las siguientes fórmulas pueden demostrarse con facilidad:

(25) $$\bigvee_x \bigvee_y \varphi(x, y) \equiv \bigvee_y \bigvee_x \varphi(x, y).$$

(26) $$\bigwedge_x \bigwedge_y \varphi(x, y) \equiv \bigwedge_y \bigwedge_x \varphi(x, y).$$

La expresión de ambas fórmulas podemos sustituirla por $\bigvee_{x,y} \varphi(x, y)$ o $\bigvee_z \varphi(z)$ la primera, y $\bigwedge_{x,y} \varphi(x, y)$ o $\bigwedge_z \varphi(z)$ la segunda.

Estas fórmulas expresan la conmutabilidad de la operación $\bigvee$ respecto a $\bigvee$, y la de la operación $\bigwedge$ respecto a $\bigwedge$.

Por lo que hace al significado de la secuencia de los operadores $\bigvee$ y $\bigwedge$, se tiene la importante fórmula siguiente:

(27) $$\bigvee_x \bigwedge_y \varphi(x, y) \Rightarrow \bigwedge_y \bigvee_x \varphi(x, y).$$

El primer miembro indica que existe algún x_0 tal que, para todo valor de la variable y, $\varphi(x_0, y)$ es verdad; por tanto, a cada y podemos asignar una x (precisamente $x = x_0$) tal que $\varphi(x, y)$ es verdad, y esto es, exactamente, lo que expresa el segundo miembro.

Por lo demás, la implicación (27) en la dirección opuesta puede fallar (comparar con la fórmula (9)). Por ejemplo, en el dominio de los números reales es verdad que

$$\bigwedge_y \bigvee_x (y < x),$$

pero no es verdad que

$$\bigvee_x \bigwedge_y (y < x).$$

Otro ejemplo es: La hipótesis de que la función f sea acotada, puede expresarse en la siguiente forma:

$$\bigvee_y \bigwedge_x (|f(x)| < y).$$

En cambio, la proposición $\bigwedge_x \bigvee_y (|f(x)| < y)$ es cierta en general (para todas las funciones de valores reales) pues es suficiente poner $y = |f(x)| + 1$.

La fórmula obvia

(28) $$\bigwedge_x \varphi(x) \Rightarrow \bigvee_x \varphi(x)$$

(en la hipótesis de que $X \neq \emptyset$) puede reemplazarse para funciones de dos variables, con la hipótesis adicional $X = Y$, por la fórmula más general

(29) $$\bigwedge_{x,y} \varphi(x, y) \Rightarrow \bigwedge_x \varphi(x, x) \Rightarrow \bigvee_x \varphi(x, x) \Rightarrow \bigvee_{x,y} \varphi(x, y).$$

Con la misma hipótesis $X = Y$, puede sustituirse la fórmula (9) por la siguiente:

(30) $$\bigvee_x [\varphi(x) \wedge \psi(x)] \Rightarrow \bigvee_{x,y} [\varphi(x) \wedge \psi(y)]$$
$$\equiv \bigvee_x \varphi(x) \wedge \bigvee_y \psi(y) \equiv \bigvee_x \varphi(x) \wedge \bigvee_x \psi(x).$$

Análogamente, (11) puede reemplazarse por la fórmula

(31) $$\bigwedge_x \varphi(x) \vee \bigwedge_x \psi(x) \equiv \bigwedge_{x,y} [\varphi(x) \vee \psi(y)] \Rightarrow \bigwedge_x [\varphi(x) \vee \psi(x)].$$

3.6. Funciones proposicionales de n variables

Los anteriores razonamientos pueden fácilmente generalizarse al caso de que haya más de dos variables. Por ejemplo, el espacio tridimensional euclídeo es el conjunto de ternas ordenadas de números reales, es decir, $\mathcal{E} \times \mathcal{E} \times \mathcal{E}$, que indicaremos más brevemente por $\mathcal{E}^3$. Más generalmente, $\mathcal{E}^n$ indicará el espacio euclídeo n-dimensional. Denotando por $\mathcal{I}$ el intervalo cerrado $0 \leqslant t \leqslant 1$, denotaremos por $\mathcal{I}^n$ el cubo unidad n-dimensional.

Análogamente, podemos hablar de una función proposicional de n variables definida sobre uno o varios espacios. Los siguientes ejemplos ilustran el papel de los cuantificadores y el significado de algunas fórmulas relativas a ellos.

1. La continuidad de una función f en un punto dado x_0 está expresada por la siguiente condición (en la formulación de Cauchy):

$$\bigwedge_\varepsilon \bigvee_\delta \bigwedge_h (|h| < \delta) \Rightarrow (|f(x_0 + h) - f(x_0)| < \varepsilon), \tag{32}$$

en donde el dominio de variación de las variables ε y δ es el conjunto de los números reales positivos.

Por consiguiente, la continuidad de una función en un intervalo dado, $a < x < b$, se expresará anteponiendo a la fórmula (32) el cuantificador $\bigwedge_x$, y sustituyendo la constante x_0 por la variable x. Puesto que se puede intercambiar el orden de los cuantificadores $\bigwedge_x$ y $\bigwedge_\varepsilon$, tal condición se escribirá en la forma:

$$\bigwedge_\varepsilon \bigwedge_x \bigvee_\delta \bigwedge_h (|h|) < \delta) \Rightarrow (|f(x + h) - f(x)| < \varepsilon). \tag{33}$$

Si intercambiamos el orden de los cuantificadores $\bigwedge_x$ y $\bigvee_\delta$ obtenemos una condición más fuerte, que es, concretamente, la condición para la continuidad uniforme. Ya que, tras este intercambio, el cuantificador $\bigvee_\delta$ sigue a $\bigwedge_\varepsilon$ y está delante de $\bigwedge_x$, es inmediatamente evidente que δ depende de ε pero no depende de x (que es, exactamente, lo que supone la continuidad uniforme).

2. La condición de que la sucesión $a_1, a_2, \ldots$ sea convergente con límite b, puede escribirse en la forma:

$$\bigwedge_\varepsilon \bigvee_m \bigwedge_n |a_{m+n} - b| < \varepsilon. \tag{34}$$

Por tanto, la condición de que la sucesión de funciones $f_1, f_2, \ldots$ converja al límite f es que:

$$\bigwedge_x \bigwedge_\varepsilon \bigvee_m \bigwedge_n |f_{m+n}(x) - f(x)| < \varepsilon. \tag{35}$$

Intercambiando el orden de $\bigwedge_x$ y $\bigwedge_\varepsilon$ obtenemos una condición equivalente.

Intercambiamos ahora $\bigwedge_x$ y $\bigvee_m$, con lo que obtendremos una condición más fuerte:

$$\bigwedge_\varepsilon \bigvee_m \bigwedge_x \bigwedge_n |f_{m+n}(x) - f(x)| < \varepsilon. \tag{36}$$

Esta es la condición para la convergencia uniforme.

3.7. Observaciones sobre los axiomas

Los cuatro axiomas dados en el Capítulo 2.5, son insuficientes para las discusiones relativas al Capítulo 3. Añadiendo tres axiomas adicionales obtendremos un sistema de axiomas en los que se encierran todas las propiedades del concepto de conjunto con el que tratamos en este volumen y que, hablando generalmente, es suficiente para las aplicaciones de la Teoría de conjuntos a otras ramas de la Matemática. Los nuevos axiomas son:

V. *Para toda función proposicional $\varphi(x)$ y para todo conjunto A existe un conjunto constituido por aquellos elementos del conjunto A que satisfacen la función proposicional, y sólo por ellos.*

Como es sabido (ver apartado 1), denotaremos este conjunto por el símbolo:

$$\mathbf{E}_x\varphi(x) \wedge (x \in A) \quad \text{o, más brevemente, por} \quad \mathbf{E}_x\varphi(x),$$

en donde el dominio de variación de x está restringido a A.

Tenemos ejemplos de las aplicaciones del axioma V en el apartado 3. La existencia de los conjuntos $\{a\}$, $\{a, b\}$, etc. (en donde $a \in A$, $b \in A$) sigue del axioma V, ya que

$$\{a\} = \mathbf{E}_x(x = a) \wedge (x \in A),$$

$$\{a, b\} = \mathbf{E}_x[(x = a) \vee (x = b)] \wedge (x \in A).$$

Por otra parte, la existencia de un par ordenado requiere un axioma adicional.

VI. *Para cualquier conjunto A existe un conjunto cuyos elementos son todos los subconjuntos del conjunto A.*

VII. Axioma de elección. *Para toda familia $\mathbf{R}$ de conjuntos no vacíos disjuntos, existe un conjunto que tiene un elemento y sólo uno en común con cada uno de los conjuntos de la familia $\mathbf{R}$.*

(Usaremos la expresión «familia» para indicar un conjunto cuyos elementos son conjuntos. Escribiremos entonces $\mathbf{R}$ en vez de R).

No hemos aplicado todavía el axioma de elección, pero lo utilizaremos en los capítulos posteriores.

Observemos que si completamos el sistema de axiomas I-IV con los axiomas V-VII, podemos simultáneamente omitir algunos de los axiomas

más primitivos. En particular el axioma III se deduce de los restantes, pues el conjunto

$$A - B = \mathbf{E}_x(x \in A) \wedge (x \in B)',$$

existe en virtud del axioma V.

Análogamente, no necesitaremos el axioma II para formar la unión de los conjuntos A y B si suponemos que ambos A y B son subconjuntos de un espacio fijo C (que es el caso ordinario). Pues la existencia del conjunto

$$A \cup B = \mathbf{E}_x[(x \in A) \vee (x \in B)] \wedge (x \in C)$$

resulta del axioma V.

El axioma IV es asimismo superfluo en las aplicaciones; en su lugar aparece el axioma que asegura que el espacio en consideración es un conjunto.

EJERCICIOS

1. Demostrar que ninguna de las implicaciones en la fórmula (29) puede sustituirse por una equivalencia.

2. Demostrar que

$$\bigvee_x \varphi(x) \vee \bigwedge_x \psi(x) = \bigvee_x \bigwedge_y [\varphi(x) \vee \psi(y)] = \bigwedge_y \bigvee_x [\varphi(x) \vee \psi(y)],$$

$$\bigvee_x \varphi(x) \wedge \bigwedge_x \psi(x) = \bigvee_x \bigwedge_y [\varphi(x) \wedge \psi(y)] = \bigwedge_y \bigvee_x [\varphi(x) \wedge \psi(y)].$$

3. Demostrar las siguientes equivalencias.

$$\bigwedge_x \{[\bigwedge_y \varphi(x, y)] \Rightarrow \psi(x)\} = \bigwedge_x \bigvee_y [\varphi(x, y) \Rightarrow \psi(x)],$$

$$\bigwedge_x \{[\bigvee_y \varphi(x, y)] \Rightarrow \psi(x)\} = \bigwedge_{x, y} [\varphi(x, y) \Rightarrow \psi(x)].$$

4. Expresar la definición de convergencia uniforme para la integral impropia $\int_a^\infty f(x, y)dy$ utilizando cuantificadores.

CAPÍTULO **4**

Concepto de función. Operaciones infinitas

4.1. Concepto de función

En Análisis nos referimos ordinariamente a una función real de variable real para expresar una ley que a cada número real asigna un número real, y sólo uno. Es sabido que, según el punto de vista geométrico, una función puede ser identificada con su gráfica (en el mismo sentido que un número real puede ser identificado con un punto de la línea real, o un número complejo con un punto del plano). Basándonos en la Teoría de conjuntos podemos definir como sigue el concepto general de función.

DEFINICIÓN. Sean X e Y dos conjuntos dados. Como *función* cuyos *argumentos* recorren el conjunto X (dominio) y cuyos *valores* pertenecen al conjunto Y (rango), entendemos un subconjunto f del producto cartesiano $X \times Y$ con la propiedad de que para cada $x \in X$ existe un elemento y, y sólo uno, tal que $\langle x, y \rangle \in f$. El conjunto de todas estas funciones f se denota por Y^X.

Usualmente escribimos $y = f(x)$ en vez de $\langle x, y \rangle \in f$.

Tenemos, por tanto:

$$f = \mathbf{E}_{x,y}[y = f(x)].$$

Claro es que en el caso en que X e Y denoten conjuntos de números reales, el segundo miembro de esta fórmula describe la gráfica de la función en el sentido usual de la palabra. Una observación análoga se aplica a una función real de dos variables reales (o a una función real de variable compleja).

No afirmamos que los valores de la función f agoten totalmente el conjunto Y. Pero cuando esta condición se cumpla, diremos que la función f es una aplicación del conjunto X *sobre* el conjunto Y.

Cuando X sea el conjunto de los números naturales, llamaremos *sucesión infinita* a la función f. En vez de $f(n)$ escribiremos entonces f_n (o más frecuentemente a_n) y llamaremos a los valores de la función *términos* de la sucesión.

Nota. El concepto de función es un caso particular del concepto de *relación* en el sentido de la Teoría de conjuntos. Precisamente, relación significa, en este sentido, un subconjunto arbitrario R del producto cartesiano $X \times Y$. En vez de escribir $\langle x, y \rangle \in R$, se escribe usualmente xRy (que se lee: x está en la relación R con y).

Cada función proposicional $\varphi(x,y)$ de las variables x e y con los conjuntos X e Y como dominios de variación respectiva (es decir una relación en el sentido de lógica), determina un conjunto $R \subset X \times Y$, a saber.

$$R = \mathbf{E}_{x,y}\varphi(x, y).$$

4.2. Operaciones generalizadas

Ahora consideraremos el caso en que los valores de la función son conjuntos. En este caso, sea F una función cuyos argumentos recorren el conjunto no vacío T y cuyos valores son subconjuntos de algún conjunto dado X (es decir son elementos de la familia $\mathbf{X}$ de todos los subconjuntos del conjunto X). Escribiremos F_t en vez de $F(t)$.

Introduciremos ahora dos operaciones con funciones, llamadas *unión generalizada* e *intersección generalizada* (que son análogas a los cuantificadores $\bigvee_t$ y $\bigwedge_t$), definidas como sigue:

$\bigcup_t F_t$ es el conjunto al que x pertenece si y sólo si pertenece al menos a uno de los conjuntos F_t (se denota también por $\Sigma_t F_t$).

$\bigcap_t F_t$ es el conjunto al que x pertenece si y sólo si pertenece a todos los conjuntos F_t (se denota también por $\Pi_t F_t$).

En la notación de lógica esto significa que

(1) $$(x \in \bigcup_t F_t) \equiv \bigvee_t (x \in F_t),$$

(2) $$(x \in \bigcap_t F_t) \equiv \bigwedge_t (x \in F_t).$$

Estas operaciones son verdaderas generalizaciones de las conocidas operaciones de unión e intersección de conjuntos (Cap. 2.1). Pues si el conjunto T es el conjunto formado por los números $1, 2, \ldots, n$, entonces:

$$\bigcup_t F_t = F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_n, \quad \bigcap_t F_t = F_1 \cap F_2 \cap \ldots \cap F_n.$$

Añadamos que en el caso en que F es una sucesión infinita de conjuntos, es decir si T es el conjunto de los números naturales, entonces usamos la notación: $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ en vez de $\bigcup_t F_t$ y $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ en vez de $\bigcap_t F_t$.

Ahora siguen varias fórmulas que pueden demostrarse fácilmente. (La (4) es la generalización de la fórmula de Morgan):

(3) $$\bigcap_t F_t \subset F_t \subset \bigcup_t F_t,$$

(4) $$(\bigcup_t F_t)^c = \bigcap_t F_t^c, \qquad (\bigcap_t F_t)^c = \bigcup_t F_t^c,$$

(5) si $F_t \subset A$ para todo t, entonces $\bigcup_t F_t \subset A$,

(6) si $A \subset F_t$ para todo t, entonces $A \subset \bigcap_t F_t$.

Como ejemplo, demostraremos la fórmula (5). Sea $x \in \bigcup_t F_t$. En virtud de (1) existe un t_0 que $x \in F_{t_0}$; pero por hipótesis $F_{t_0} \subset A$, luego $x \in A$. Esto significa que $\bigcup_t F_t \subset A$.

Nota. Como en el Capítulo 3 (cfr. *nota*, apartado 2) también utilizaremos las operaciones $\bigvee_{\varphi(t)} F_t$ y $\bigwedge_{\varphi(t)} F_t$, en donde $\varphi(t)$ es una función proposicional dada. El sentido de estas operaciones viene definido por las fórmulas (1) y (2) reemplazando en ellas $\bigvee_t$ por $\bigvee_{\varphi(t)}$ y $\bigwedge_t$ por $\bigwedge_{\varphi(t)}$.

4.3. La función $F_x = E_y \varphi(x, y)$

Sea $\varphi(x, y)$ una función proposicional dada de dos variables. Fijado x_0, $\mathbf{E}_y \varphi(x_0, y)$ es cierto subconjunto del espacio Y. De aquí, si ponemos

(7) $$F_x = \mathbf{E}_y \varphi(x, y),$$

se define una función F que hace corresponder a cada elemento $x \in X$ un subconjunto del espacio Y. Apliquemos las operaciones $\bigvee_x$ y $\bigwedge_x$ a esta función. Obtenemos las siguientes fórmulas que exponen la dualidad entre la disyunción y la conjunción generalizadas, y los cuantificadores (comparar con Cap. 3.1, (2) y (3)):

(8) $$\bigcup_x \mathbf{E}_y \varphi(x, y) = \mathbf{E}_y \bigvee_x \varphi(x, y),$$

(9) $$\bigcap_x \mathbf{E}_y \varphi(x, y) = \mathbf{E}_y \bigwedge_x \varphi(x, y).$$

En efecto, por las fórmulas (1), párrafo 2 y (1) Cap. 3.1, tenemos:

$$y_0 \in \bigcup_x \mathbf{E}_y \varphi(x, y) \equiv \bigvee_x [y_0 \in \mathbf{E}_y \varphi(x, y)]$$
$$\equiv \bigvee_x \varphi(x, y_0) \equiv y_0 \in \mathbf{E}_y \bigvee_x \varphi(x, y).$$

La fórmula (9) se demuestra análogamente.

El conjunto $\mathbf{E}_y \bigvee_x \varphi(x, y)$ tiene la interesante interpretación geométrica siguiente.

Notando la analogía con la Geometría analítica, diremos que el elemento $\langle x, y \rangle$, del producto cartesiano $X \times Y$ tiene la *abscisa* x y la *ordenada* y, y que X es el eje de abscisas e Y es el eje de ordenadas del espacio $X \times Y$. Análogamente si $A \subset X \times Y$, el conjunto de abscisas de los

elementos del conjunto A será llamado la X-proyección del conjunto A, y el conjunto de ordenadas será llamado Y-proyección de A. Ahora:

(10) El conjunto $\mathbf{E}_y \bigvee_x \varphi(x, y)$ es la Y-proyección del conjunto $\mathbf{E}_{x,y}\varphi(x, y)$.

En efecto, y_0 es un elemento de la proyección del conjunto $A = \mathbf{E}_{x,y}(x, y)$ siempre y cuando exista un x_0 tal que $\langle x_0, y_0 \rangle \in A$, es decir, si $\varphi(x_0, y_0)$ es cierto; en otras palabras, si $\bigvee_x \varphi(x, y_0)$, es decir si $y_0 \in \mathbf{E}_y \bigvee_x \varphi(x, y)$.

El cuantificador universal no tiene ninguna interpretación geométrica semejante.

Ejemplo. Por la definición paramétrica del círculo S con centro $\langle 0, 0 \rangle$ y radio r, el punto $\langle x, y \rangle$ pertenece al círculo si existe una t tal que:

(11) $$x = r \cos t, \qquad y = r \operatorname{sen} t,$$

es decir,

$$S = \mathbf{E}_{x,y} \bigvee_t (x = r \cos t) \wedge (y = r \operatorname{sen} t).$$

Esto significa que las fórmulas (11), que dan la definición paramétrica del círculo S, definen a este círculo como la proyección sobre un subconjunto del plano $X \times Y$ (es decir la XY-proyección) de la hélice situada en el espacio tridimensional $X \times Y \times T$ definida (de un modo explícito) por el mismo sistema de ecuaciones (11).

4.4. Imágenes e imágenes inversas

Sea f una función con argumentos del espacio X y con valores del espacio Y. Supongamos $A \subset X$. Indicaremos por $f(A)$ la imagen del conjunto A respecto a la función f; es decir, $f(A)$ es el conjunto de valores que toma la función f cuando el argumento x recorre el conjunto A; en otras palabras:

(12) $$[y \in f(A)] \equiv \bigvee_x (x \in A) \wedge (y = f(x)),$$

es decir

$$f(A) = \mathbf{E}_y \bigvee_x (x \in A) \wedge (y = f(x)).$$

Podemos también formular esta definición de la siguiente manera: Indiquemos por $f|A$ la función que resulta de la función f limitando sus argumentos al conjunto A (es decir, $f|A$ es una función parcial o restringida). Entonces, $f(A)$ es la proyección de la función $f|A$ sobre un subconjunto del eje Y.

La imagen inversa del conjunto B contenido en Y es el conjunto $f^{-1}(B)$ formado por toda x tal que $f(x) \in B$; por tanto,

(13) $$[x \in f^{-1}(B) \equiv [f(x) \in B), \quad \text{es decir} \quad f^{-1}(B) = \mathbf{E}_x f(x) \in B.$$

(*Nota.* Con el fin de evitar un concepto falso suponemos que $A \notin X$ y $B \notin Y$).

Por ejemplo, para la función definida por la ecuación $y = x^2$, el conjunto $f^{-1}(\{1\})$ consiste en dos números: 1 y -1.

Notemos las siguientes fórmulas:

(14) $$f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$$

y más generalmente:

$$f(\bigcup_t F_t) = \bigcup_t f(F_t),$$

(15) $$f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2),$$

y más generalmente:

$$f(\bigcap_t F_t) \subset \bigcap_t f(F_t),$$

(16) $$f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2),$$

$$f^{-1}(\bigcup_t G_t) = \bigcup_t f^{-1}(G_t),$$

(17) $$f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2),$$

$$f^{-1}(\bigcap_t G_t) = \bigcap_t f^{-1}(G_t),$$

(17 a) $$f^{-1}(B_1 - B_2) = f^{-1}(B_1) - f^{-1}(B_2),$$

(18) $$ff^{-1}(B) = B \quad \text{si} \quad B \subset f(X),$$

(19) $$A \subset f^{-1}f(A).$$

Probaremos la fórmula (15). Puesto que $(\bigcap_t F_t) \subset F_t$, tenemos $f(\bigcap_t F_t) \subset f(F_t)$, y (15) se sigue por (6).

4.5. Las operaciones S (R) y P (R)

Además de las operaciones $\bigcup$ y $\bigcap$ con funciones, consideramos las operaciones $S(\mathbf{R})$ y $P(\mathbf{R})$ con familias de conjuntos. Es decir suponiendo que $\mathbf{R}$ sea una familia no vacía de subconjuntos de un conjunto dado A, denotemos por $S(\mathbf{R})$ la unión, y por $P(\mathbf{R})$ la intersección, de todos los conjuntos pertenecientes a la familia $\mathbf{R}$, es decir:

(20) $$x \in S(\mathbf{R}) \equiv \bigvee_X (x \in X \in \mathbf{R}),$$

(21) $$x \in P(\mathbf{R}) \equiv \bigwedge_X [(X \in \mathbf{R}) \Rightarrow (x \in X)].$$

Usamos aquí la misma terminología (unión e intersección) que en el caso en que $\mathbf{R}$ sea una familia formada por un número finito de conjuntos $\mathbf{R} = \{A_1, \ldots, A_n\}$; pues

$$S(\mathbf{R}) = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n,$$
$$P(\mathbf{R}) = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n.$$

4.6. Familias aditivas y multiplicativas de conjuntos

Decimos que la familia $\mathbf{R}$ de conjuntos es *aditiva* si

(22) $$(X \in \mathbf{R}, Y \in \mathbf{R}) \Rightarrow (X \cup Y \in \mathbf{R}),$$

es *multiplicativa* si

(23) $$(X \in \mathbf{R}, Y \in \mathbf{R}) \Rightarrow (X \cap Y \in \mathbf{R}),$$

es *sustractiva* si

(24) $$(X \in \mathbf{R}, Y \in \mathbf{R}) \Rightarrow (X - Y \in \mathbf{R}).$$

Una familia de conjuntos aditiva y sustractiva es multiplicativa, ya que $X \cap Y = X - (X - Y)$. Evidentemente, las operaciones de unión, intersección y sustracción realizadas con conjuntos pertenecientes a esa familia no pueden dar un resultado ajeno a ella.

Ejemplo. La familia de los subconjuntos finitos de un conjunto fijo A satisfacen las condiciones (22)-(24). Los conjuntos que son unión de un número finito de intervalos cerrados forman una familia aditiva, pero no forman una familia sustractiva.

Teorema. *Para toda familia $\mathbf{Z}$ de subconjuntos de un conjunto A existen,*

1. *una familia aditiva mínima $\mathbf{R}_s$ tal que $\mathbf{Z} \subset \mathbf{R}_s$,*
2. *una familia multiplicativa mínima $\mathbf{R}_p$ tal que $\mathbf{Z} \subset \mathbf{R}_p$, y*
3. *una familia aditiva y sustractiva mínima de conjuntos $\mathbf{R}_c$ tal que $\mathbf{Z} \subset \mathbf{R}_c$.*

Demostración. Denotemos por $\mathcal{M}$ la totalidad de todas las familias aditivas $\mathbf{R}$ que satisfacen la condición $\mathbf{Z} \subset \mathbf{R}$ (constituidas por subconjuntos del conjunto A). Obviamente $\mathcal{M} \neq \emptyset$ pues la familia de todos los subconjuntos del conjunto A es un elemento de $\mathcal{M}$. Pongamos:

(25) $$\mathbf{R}_s = P(\mathcal{M}).$$

Demostraremos que la familia $\mathbf{R}_s$ es aditiva y que $\mathbf{Z} \subset \mathbf{R}_s$.

Sea $X \in \mathbf{R}_s$ e $Y \in \mathbf{R}_s$. Por tanto (cfr. (21)) $X \in \mathbf{R}$ e $Y \in \mathbf{R}$ para cualquier $\mathbf{R} \in \mathcal{M}$. Como las familias $\mathbf{R}$ pertenecientes a $\mathcal{M}$ son aditivas, también $X \cup Y \in \mathbf{R}$; puesto que esta última fórmula vale para todo $\mathbf{R} \in \mathcal{M}$ será, según (21), $X \cup Y \in \mathbf{R}_s$.

Probaremos ahora que $\mathbf{Z} \subset \mathbf{R}_s$. Por hipótesis tenemos $\mathbf{Z} \subset \mathbf{R}$ para todo $\mathbf{R} \in \mathcal{M}$. En otras palabras, si $X \in \mathbf{Z}$ también $X \in \mathbf{R}$ y, por lo tanto, $X \in \mathbf{R}_s$. Esto significa que $X \in \mathbf{Z} \Rightarrow X \in \mathbf{R}_s$ o sea, que $\mathbf{Z} \subset \mathbf{R}_s$.

Finalmente, la familia $\mathbf{R}_s$ es la familia aditiva mínima que contiene a la familia $\mathbf{R}$, ya que es la intersección de todas las familias con esta propiedad.

Para definir la familia $\mathbf{R}_p$, indicamos por $\mathcal{H}$ la totalidad de todas las familias multiplicativas $\mathbf{R}$ que satisfacen a la condición $\mathbf{Z} \subset \mathbf{R}$ y pondremos:

(26) $$\mathbf{R}_p = P(\mathcal{H}).$$

La demostración de que la familia $\mathbf{R}_p$ satisface la condición 2 es totalmente análoga a la demostración anterior.

En cuanto a la familia $\mathbf{R}_c$, se define de una manera similar.

Nota. Cuando $\mathbf{Z}$ sea la familia de todos los subconjuntos con sólo un elemento del conjunto A, obtenemos como familia $\mathbf{R}_s$ la familia de todos los subconjuntos finitos del conjunto A.

De ahí se sigue que una condición necesaria y suficiente para que el conjunto A sea finito es que la familia de todos sus subconjuntos no vacíos sea idéntica a $\mathbf{R}_s$. Esta equivalencia puede servir como definición de un conjunto finito (la cual no hace referencia al concepto de número natural).

4.7. Familias de Borel

Decimos que una familia $\mathbf{R}$ de conjuntos es *numerablemente aditiva* o *numerablemente multiplicativa* si las condiciones $X_n \in \mathbf{R}$ para $n = 1, 2 \dots$ implican que

(27) $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n \in \mathbf{R}$, o $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n \in \mathbf{R}$, respectivamente.

(Estos conceptos juegan un papel importante en la teoría de probabilidades).

Encontraremos un gran número de ejemplos de familias de este tipo en la segunda parte de este libro; así, la familia de los subconjuntos cerrados del espacio de los números reales es numerablemente multiplicativa (un conjunto cerrado es un conjunto que contiene todos sus puntos de acumulación); la familia de sus complementos es numerablemente aditiva. Notemos que la familia de los conjuntos cerrados no es sólo numerablemente multiplicativa, sino que también es *absolutamente* multiplicativa, es decir, la intersección de una familia arbitraria de conjuntos cerrados es cerrada (ver Parte II, Cap. 11.2).

Una familia de conjuntos se llama una *familia de Borel* si es a la vez numerablemente aditiva y numerablemente multiplicativa.

Las operaciones $\bigcup_{n=1}^{\infty}$ y $\bigcap_{n=1}^{\infty}$ realizadas entre elementos de una familia de Borel nunca dan, pues, un resultado que sea ajeno a la propia familia.

Atendiendo a la numerabilidad es válido el siguiente teorema, análogo al establecido en el apartado 6:

Teorema. *Para cada familia* $\mathbf{Z}$ *de subconjuntos del conjunto* A *existen:*

1. *una familia numerablemente aditiva mínima* $\mathbf{R}_\sigma$ *tal que* $\mathbf{Z} \subset \mathbf{R}_\sigma$;
2. *una familia numerablemente multiplicativa mínima* $\mathbf{R}_\delta$ *tal que* $\mathbf{Z} \subset \mathbf{R}_\delta$;
3. *una familia de Borel mínima* $\mathbf{R}_\beta$ *tal que* $\mathbf{Z} \subset \mathbf{R}_\beta$.

Para demostrar 1 consideraremos la totalidad $\mathfrak{A}$ de las familias numerablemente aditivas **R** que satisfacen la condición $\mathbf{Z} \subset \mathbf{R}$ (y constituidas por subconjuntos del conjunto A) y pondremos $\mathbf{R}_\sigma = P(\mathfrak{A})$. Exactamente del mismo modo con que probamos el teorema del apartado 6, demostraremos aquí que la familia $\mathbf{R}_\sigma$ satisface la condición 1.

Las familias $\mathbf{R}_\delta$ y $\mathbf{R}_\beta$ se determinan análogamente.

Notas. Se acostumbra a decir que la familia $\mathbf{R}_\beta$ es la familia de Borel engendrada por la familia **Z**. Si **Z** es la familia de todos los intervalos cerrados de la recta real, entonces los conjuntos pertenecientes a $\mathbf{R}_\beta$ se llaman, brevemente, los subconjuntos de Borel (o *borelianos*) del espacio de los números reales (recta real). Es notable destacar que todos los conjuntos de números reales que deben utilizarse en la práctica son conjuntos de Borel (ver, además, Cap. 11.6).

4.8. Productos cartesianos generalizados

Sea $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ una sucesión infinita de conjuntos dados. Llamaremos producto cartesiano de estos conjuntos al conjunto de todas las sucesiones infinitas de la forma:

(28) $\qquad a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots,$ en donde $a_n \in A_n$ para todo n.

Designaremos este conjunto por el símbolo

(29) $$\mathbf{P}_{n=1}^{\infty} A_n.$$

El producto (29) cuando $A_n = \mathcal{E}$, es decir, cuando A_n es el conjunto de los números reales para todo n, es especialmente importante en las aplicaciones. Indicamos este producto por el símbolo $\mathcal{E}^{\aleph_0}$; esta es la generalización natural del concepto de espacio euclídeo n-dimensional al caso de un número infinito de dimensiones.

Análogamente, si $\mathcal{I}$ denota el intervalo $0 < t < 1$, entonces, $\mathcal{I}^{\aleph_0}$, llamado el cubo unidad de infinitas dimensiones, es el conjunto de todas las sucesiones infinitas con términos pertenecientes al intervalo $\mathcal{I}$.

Obtenemos generalizaciones más amplias del concepto de producto cartesiano considerando, en vez de sucesiones, conjuntos de funciones arbitrarias cuyos valores sean conjuntos. Sea F una función cuyos argumentos recorren el conjunto $T (\neq \emptyset)$ y cuyos valores son subconjuntos de un conjunto dado X. Entonces el producto cartesiano

(30) $$\mathbf{P}_t F_t$$

es el conjunto de todas las funciones f tales que $f(t) \in F_t$ (en donde $t \in T$). Así, pues, tenemos

$$(f \in \mathbf{P}_t F_t) \equiv \bigwedge_t [f(t) \in F_t].$$

Como puede verse, cuando T es el conjunto de todos los números naturales los conjuntos (30) y (29) son idénticos.

Puede también observarse que si $F_t = X$ para todo $t \in T$, entonces $\mathbf{P}_t F_t = X^T$.

EJERCICIOS

1. Demostrar las siguientes fórmulas:

(a) $\bigcap_t (F_t \cap G_t) = \bigcap_t F_t \cap \bigcap_t G_t, \quad \bigcup_t (F_t \cup G_t) = \bigcup F_t \cup \bigcup_t G_t,$

(b) $\bigcap_t F_t \cup \bigcap_t G_t = \bigcap_{t,s} (F_t \cup G_s) \subset \bigcap_t (F_t \cup G_t),$

(c) $\bigcup_t (F_t \cap G_t) \subset \bigcap_{t,s} (F_t \cap G_s) = \bigcup_t F_t \cap \bigcup_t G_t,$

(d) $\bigcup_t (A \cup F_t) = A \cup \bigcap_t F_t, \quad \bigcup_t (A \cap F_t) = A \cap \bigcup_t F_t.$

Demostrar que el signo de inclusión no puede ser sustituido por el signo de igualdad en las fórmulas (b) y (c).

2. Demostrar que si

$$A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_n \supset \ldots \qquad \text{y} \qquad B_1 \supset B_2 \supset \ldots \supset B_n \supset \ldots,$$

entonces:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} (A_n \cup B_n) = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \cup \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n.$$

3. Demostrar que

$$(\bigcup_t F_t) \times (\bigcup_t G_t) = \bigcup_{t,s} (F_t \times G_s),$$
$$(\bigcap_t F_t) \times (\bigcap_t G_t) = \bigcap_{t,s} (F_t \times G_s).$$

4. Si $F_n \subset F_0$ para $n = 1, 2, \ldots$, entonces:

$$F_0 = (F_0 - F_1) \cup (F_1 - F_2) \cup (F_2 - F_3) \cup \ldots \cup \bigcap_{n=0}^{\infty} F_n.$$

Si $F_0 \supset F_1 \supset F_2 \supset \ldots$, entonces $(F_1 - F_2) \cup (F_3 - F_4) \cup \ldots \cup \bigcap_{n=0}^{\infty} F_n = F_0 - [(F_0 - F_1) \cup (F_2 - F_3) \cup \ldots]$.

5. Si $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \emptyset$ y $B_0 = 1$, entonces:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \cap (B_{n-1} - B_n).$$

6. Definimos la *cota superior mínima* y la *cota inferior máxima* de una sucesión infinita de conjuntos $F_1, F_2, \ldots, F_n, \ldots$, respectivamente, como sigue:

$$\limsup F_n = \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{k=0}^{\infty} F_{n+k}, \qquad \liminf F_n = \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcap_{k=0}^{\infty} F_{n+k}.$$

Demostrar las siguientes fórmulas:

(a) $\liminf A^c_n = (\limsup A_n)^c$,
(b) $\liminf (A_n \cap B_n) = \liminf A_n \cap \liminf B_n$,
(c) $\limsup (A_n \cup B_n) = \limsup A_n \cup \limsup B_n$,
(d) $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \subset \liminf A_n \subset \limsup.\ A_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$,
(e) $\liminf A_n \cup \liminf B_n \subset \liminf (A_n \cup B_n)$,
(f) $\limsup (A_n \cap B_n) \subset \limsup A_n \cap \limsup B_n$,
(g) $A \dot{-} \liminf A_n \subset \limsup (A \dot{-} A_n)$,
(h) $A \dot{-} \limsup A_n \subset \limsup (A \dot{-} A_n)$.

Demostrar en las anteriores fórmulas, que el signo de inclusión no puede ser remplazado por el de igualdad.

7. Si $\lim\sup F_n = \lim\inf F_n$, entonces decimos que la sucesión $F_1, F_2, \ldots$ *converge* al límite:

$$\lim F_n = \lim\sup F_n = \lim\inf F_n.$$

Demostrar que

(a) si $F_1 \subset F_2 \subset \ldots$, entonces $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = \lim F_n$,
(b) si $F_1 \supset F_2 \supset \ldots$, entonces $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \lim F_n$.

8. Definir la *función característica* f_A del conjunto A por las condiciones:

$$f_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in A, \\ 0 & \text{si} \quad x \in A^c. \end{cases}$$

Demostrar la equivalencia

$$(F = \lim F_n) \equiv (f_F(x) = \lim f_{F_n}(x)).$$

9. Demostrar las fórmulas:

(a) $f(A_1) - f(A_2) \subset f(A_1 - A_2)$,
(b) $f[A \cap f^{-1}(B)] = f(A) \cap B$,
(c) si $A_1 \subset A_2$, entonces $f(A_1) \subset f(A_2)$,
(d) si $B_1 \subset B_2$, entonces $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$.

10. Sea $g = f|A$ (cfr. Cap. 4.4). Demostrar que

$$g^{-1}(B) = A \cap f^{-1}(B).$$

11. Mediante el axioma de elección demostrar que:

(a) $\bigwedge_x \bigvee_y \varphi(x, y) \equiv \bigvee_f \bigwedge_x \varphi(x, f(x))$,
(b) $\bigcup_y \bigcap_x F_{x,y} \subset \bigcap_x \bigcup_y F_{x,y}$,
(c) si las condiciones $x \neq x_1$ e $y \neq y_1$ implican

$$F_{x,y} \cap F_{x_1,y_1} = \emptyset,$$

entonces,

$$\bigcup_y \bigcap_x F_{x,y} = \bigcap_x \bigcup_y F_{x,y}.$$

12. Siendo $\mathbf{R}$ una familia de conjuntos, denotamos por $\mathbf{R}_\varrho$ la familia de todos los conjuntos de la forma $Z = X - Y$, en donde $X, Y \in \mathbf{R}$. Demostrar que $\mathbf{R}_\varrho \subset \mathbf{R}_{\varrho\varrho}$, y demostrar por un ejemplo que la inclusión inversa puede ser falsa.

13. Demostrar que:

$$S(\mathbf{R}_1 \cup \mathbf{R}_2) = S(\mathbf{R}_1) \cup S(\mathbf{R}_2), \qquad S(R_1 \cap \mathbf{R}_2) \subset S(\mathbf{R}_1) \cap S(\mathbf{R}_2).$$

Demostrar que si los elementos de $\mathbf{R}_1 \cup \mathbf{R}_2$ son conjuntos disjuntos, entonces:

$$S(\mathbf{R}_1 \cap \mathbf{R}_2) = S(\mathbf{R}_1) \cap S(\mathbf{R}_2).$$

14. Demostrar que si $\mathbf{R}_1 \cap \mathbf{R}_2 \cap \emptyset$, entonces.

$$P(\mathbf{R}_1) \cap P(\mathbf{R}_2) \subset P(\mathbf{R}_1 \cap \mathbf{R}_2).$$

Capítulo **5**

Potencia de un conjunto. Conjuntos numerables

5.1. Funciones uno-uno

Se dice que una función f es *uno a uno* o, más simplemente, que es una función *uno-uno*, si a distintos valores del argumento corresponden distintos valores de la función, es decir, si

(1) $$(x_1 \neq x_2) \Rightarrow [f(x_1) \neq f(x_2)]$$

o, análogamente, si

(2) $$[f(x_1) = f(x_2)] \Rightarrow (x_1 = x_2).$$

Por ejemplo la función x^3 es uno-uno (en el dominio de los números reales) pero la función x^2 no lo es.

Sea X el conjunto de los argumentos de la función f y sea Y el conjunto de sus valores. Entonces la función f es uno-uno si determina un conjunto de pares $\langle x, y \rangle$ tales, que cada elemento $x \in X$ es el precedente y cada elemento $y \in Y$ es el siguiente en uno, y sólo en uno, de estos pares. En tal caso también se dice que entre X e Y hay una *correspondencia biunívoca;* esta es, por tanto, la definida por una función *uno-uno* y *sobre*.

Otro camino para exponer esto mismo es éste: la función f es uno-uno si para cada $y = f(x)$ el conjunto $f^{-1}(y)$ se reduce a un solo elemento x (tal que $y = f(x)$). En este caso utilizaremos normalmente el símbolo $f^{-1}(y)$ para designar a x (y no al conjunto $\{x\}$), y llamamos a la función f^{-1} de la variable y función inversa de la función dada f; Y es el conjunto de sus argumentos (dominio) y X es el conjunto de sus valores (rango).

Obviamente:

(3) $$[y = f(x)] \equiv [x = f^{-1}(y)].$$

Teorema 1. *La inversa de una función uno-uno es una función uno-uno.*

Pues, en efecto,

(4) $$(f^{-1})^{-1} = f.$$

Geométricamente, el paso a la función inversa puede interpretarse (en el caso en que X e Y son conjuntos de números reales) como la simetría de la gráfica de la función dada respecto a la recta $y = x$.

Teorema 2. *La composición de dos funciones uno-uno es una función uno-uno.*

Es, decir, si f es una aplicación uno-uno del conjunto X sobre el conjunto Y y g es una aplicación uno-uno del conjunto Y sobre el conjunto Z, entonces la función h definida por la condición $h(x) = g(f(x))$ es también uno-uno.

Pues, si $h(x_1) = h(x_2)$, también $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ y, por tanto, $f(x_1) = f(x_2)$ y, en consecuencia, $x_1 = x_2$.

En la hipótesis de que la función f sea uno-uno, las fórmulas (15) y (19) (Cap. 4.4) pueden simplificarse; podemos, concretamente, reemplazarlas por las fórmulas:

(5) $$f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2).$$

y más generalmente

$$f(\bigcap_t F_t) = \bigcap_t f(F_t),$$

(6) $$A = f^{-1}f(A).$$

En el caso en que f sea uno-uno tendremos, además de la equivalencia (13) del Capítulo 4.4, la equivalencia simétrica:

(7) $$[x \in A] \equiv [f(x) \in f(A)].$$

5.2. Conjuntos que tienen la misma potencia

Se dice que los conjuntos X e Y tienen la misma potencia, o que son equipotentes, si existe una aplicación uno-uno del conjunto X sobre Y.

Si X es un conjunto finito, $X = (a_1, \ldots, a_n)$, el conjunto Y tiene la misma potencia que X si y sólo si tienen ambos el mismo número n de elementos. El concepto de conjuntos equipotentes coincide, pues, en el caso de los conjuntos finitos, con el concepto elemental de tener ambos conjuntos el mismo número de elementos; pero el concepto aquél es más general, ya que puede aplicarse también a conjuntos infinitos.

Por ejemplo, el conjunto de los números naturales impares tiene la misma potencia que el conjunto de los números naturales pares; en efecto, la función $f(n) = n + 1$ establece una aplicación uno-uno del conjunto $(1, 3, 5, \ldots)$ sobre el conjunto $(2, 4, 6, \ldots)$.

Análogamente el conjunto de todos los números naturales es de la misma potencia que el conjunto de todos los números pares (lo que muestra que un conjunto infinito puede tener la misma potencia que algunos de sus subconjuntos propios). Para este caso la función correspondiente es $f(n) = 2n$.

Dos intervalos cualesquiera $a < x < b$ y $c < x < d$, son de igual potencia, como se demuestra fácilmente mediante una aplicación lineal. El intervalo abierto $-\pi/2 < x < \pi/2$ tiene la misma potencia que el conjunto de los números reales; la aplicación correspondiente es $y = \operatorname{tg} x$.

Más adelante demostraremos que el conjunto de todos los números naturales no tiene la misma potencia que el conjunto de todos los números reales; se sigue de esto que en el dominio de los conjuntos infinitos existen conjuntos de potencia diferente; incluso, como demostraremos luego, existe también un número infinito de conjuntos infinitos entre los que dos cualesquiera no tienen la misma potencia.

Escribiremos:

$$\overline{\overline{X}} = \overline{\overline{Y}}$$

para expresar el hecho que los conjuntos X e Y tienen la misma potencia.

Esta notación se basa en el siguiente teorema:

Teorema 3. *La relación de equipotencia es reflexiva, simétrica y transitiva, es decir:*

(8) $$\overline{\overline{X}} = \overline{\overline{X}},$$

(9) $$\textit{si } \overline{\overline{X}} = \overline{\overline{Y}}, \ \textit{también } \overline{\overline{Y}} = \overline{\overline{X}},$$

(10) $$\textit{si } \overline{\overline{X}} = \overline{\overline{Y}} \text{ e } \overline{\overline{Y}} = \overline{\overline{Z}}, \ \textit{también } \overline{\overline{X}} = \overline{\overline{Z}}.$$

Demostración. La fórmula (8) sigue del hecho de que la identidad, es decir la función $f(x) = x$, es una aplicación uno-uno del conjunto X sobre él mismo. Las fórmulas (9) y (10) siguen de los Teoremas 1 y 2, respectivamente.

El Teorema 3 permite la clasificación de los conjuntos respecto a su potencia. Esto lleva a generalizar para los conjuntos infinitos el concepto elemental de número de elementos de un conjunto. Concretamente, a cada conjunto x le asignamos un número cardinal, que es su potencia, que denotaremos por el símbolo $= \overline{\overline{X}}$, de tal manera, pues, que el mismo número cardinal será asignado a dos conjuntos distintos, siempre y cuando estos conjuntos tengan la misma potencia (los números cardinales juegan sólo un papel auxiliar en la Teoría de conjuntos, ya que todos los teoremas de ésta podrían ser formulados sin utilizarlos. No obstante, haciendo uso

de ellos, muchos teoremas ganan en claridad y en su enunciado se ve mejor su analogía con los teoremas de Aritmética.)

El número cardinal de un conjunto finito es el número de sus elementos.

5.3. Conjuntos numerables

Un conjunto A se dice infinito numerable si tiene la misma potencia que el conjunto de los números naturales; en otras palabras, si sus elementos pueden ser ordenados en una sucesión infinita de términos distintos.

A los conjuntos finitos se les llama también *conjuntos numerables.*

Puede pues, decirse que un conjunto no vacío es numerable si sus elementos pueden ser ordenados en una sucesión infinita (en la cual es posible que hayan repeticiones). Ya que si esta sucesión contiene un número infinito de términos distintos, entonces existe una subsucesión que contiene a cada término precisamente una vez.

Como vimos antes, el conjunto de los números naturales pares es numerable (y análogamente el conjunto de los números naturales impares).

Teorema 1. . *El conjunto de todos los números reales no es numerable.*

Para probar este teorema basta obviamente demostrar que para toda sucesión de números reales $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ podemos definir un número real c que no pertenece a esa sucesión.

Con este fin, definimos una serie de intervalos cerrados

$$p_1q_1, p_2q_2, \ldots, p_nq_n, \ldots,$$

tales que

$$q_n - p_n = 1/3^n, \qquad p_nq_n \subset p_{n-1}q_{n-1}, \qquad a_n \notin p_nq_n.$$

Así en el intervalo [0, 1] encontraremos un intervalo cerrado p_1q_1 que no contiene al punto a_1 (este será uno de los tres intervalos (0, 1/3), (1/3, 2/3) y (2/3, 1). Análogamente, en el intervalo p_1q_1 determinaremos un intervalo p_2q_2 de extensión 1/9, que no contiene al punto a_2. En general, en el intervalo cerrado $p_{n-1}q_{n-1}$ determinaremos un intervalo p_nq_n cerrado de extensión $1/3^n$ que no contiene al punto a_n.

Sea c el punto común a todos los intervalos cerrados p_nq_n:

$$\{c\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} p_nq_n, \quad \text{es decir,} \quad c = \lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty} q_n.$$

Obviamente, $c \neq a_n$ para todo n, ya que $a_n \notin p_nq_n$ que mientras $c \in p_nq_n$.

Vamos ahora a exponer varias propiedades importantes de los conjuntos numerables.

Teorema 2. *La unión $A \cup B$ de dos conjuntos numerables A y B es numerable.*

En efecto, conforme a la hipótesis de que los elementos del conjunto A pueden escribirse en forma de sucesión infinita $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, y los elementos del conjunto B en forma de sucesión $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$, consideramos la sucesión.

$$(11) \qquad a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_n, b_n, \ldots$$

Los términos de esta sucesión obviamente constituyen el conjunto $A \cup B$.

De esto se sigue que el conjunto de todos los números enteros es numerable. Pues el conjunto de todos los enteros positivos, así como el conjunto de todos los enteros negativos, son numerables.

Teorema 3. *El producto cartesiano de dos (y también, más generalmente, de un número finito) de conjuntos numerables es un conjunto numerable.*

Demostración. Demostraremos que el conjunto de pares $\langle m, n\rangle$, en donde m y n son números naturales, es numerable. Para ello bastará presentar este conjunto en forma de sucesión. Con este fin, adoptamos la siguiente regla: de dos pares $\langle m, n\rangle$ y $\langle m', n'\rangle$ consideremos que es anterior aquel cuya suma de elementos sea menor; pero si $m + n = m' + n'$, entonces el par anterior será el que tenga menor su primer elemento; por consiguiente, la sucesión puede ser presentada como sigue:

$$(12) \qquad \langle 1, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 1, 3\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 3, 1\rangle, \ldots$$

Con esto deducimos ya fácilmente, que dadas dos sucesiones infinitas $a_1, a_2, \ldots, a_m, \ldots$ y $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$, podremos escribir la sucesión de todos los pares $\langle a_m, b_n\rangle$, en forma de sucesión infinita.

La generalización del caso de dos al de un número finito arbitrario de conjuntos numerables no presenta dificultad.

Del Teorema 3 se sigue que el conjunto de todos los números racionales es numerable, pues, cada número positivo racional puede ser representado como un par de números, p/q (en su forma irreducible), es decir, el conjunto de los números racionales positivos puede presentarse como una subsucesión de la sucesión (12). El conjunto de los números racionales positivos es por tanto numerable. Lo mismo vale para el conjunto de los números racionales negativos juntamente con el 0. Por tanto, conforme con el Teorema 2, el conjunto de todos los números racionales es numerable.

Del Teorema 3 se sigue también que toda sucesión doble $\{a_{mn}\}$ puede transformarse en una sucesión simple, es decir, que los elementos que se presentan en una disposición como la siguiente:

$$\begin{matrix} a_{11}, & a_{12}, & \ldots, & a_{1n}, & \ldots \\ a_{21}, & a_{22}, & \ldots, & a_{2n}, & \ldots \end{matrix}$$

(13)
$$\begin{array}{c} \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn}, \dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}$$

pueden también presentarse en una sucesión infinita como

(14) $$a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{13}, \dots$$

De esto deducimos el siguiente teorema:

Teorema 4. *La unión $S = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m \cup \dots$ de una sucesión numerable de conjuntos numerables es numerable.*

En efecto: Escribiremos cada uno de los conjuntos A_m en forma de sucesión $a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn}, \dots$, y luego transformaremos la sucesión doble a_{mn} en la sucesión simple (14) (tal vez con repeticiones.) (Aquí aplicamos el axioma de elección (Cap. 3.7), pues el conjunto de las sucesiones que es posible formar con los elementos del conjunto A_m tiene más de un elemento y ninguno de ellos, en general, puede ser distinguido).

Teorema 5. *El conjunto de todas las sucesiones finitas cuyos términos sean elementos de un conjunto numerable dado es numerable.*

Pues aquel conjunto puede representarse como la unión

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m \cup \dots,$$

en donde A_m es el conjunto de las sucesiones con m elementos, y para todo m el conjunto A_m es numerable, por el Teorema 3.

De aquí deducimos que el conjunto de todos los polinomios con coeficientes racionales es numerable.

Pues cada polinomio está determinado por sus coeficientes, es decir, el polinomio $a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m$ está determinado por la sucesión de los $m + 1$ números racionales $a_0, a_1, \dots, a_m$.

Corolario. *El conjunto de todos los números algebraicos es numerable.*

En efecto, el conjunto de todos los polinomios con coeficientes racionales es numerable y en consecuencia lo podemos escribir en forma de sucesión infinita, $W_1, W_2, \dots, W_m, \dots$ Indiquemos por A_m el conjunto de raíces de la ecuación $W_m(x) = 0$; este conjunto, como es sabido, es finito (el número de sus elementos no excede al grado del polinomio W_m). Por lo tanto, en virtud del Teorema 4, el conjunto $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m \cup \dots$, es decir, el conjunto de todos los números algebraicos, es numerable.

Nota. Este último resultado, junto con el Teorema 1 nos conducen al resultado de que existen los números transcendentes (es decir no algebraicos), y también que hay una infinidad no numerable de ellos (pues la unión de dos conjuntos numerables es numerable). Haciendo uso de los métodos ya expuestos, también podría definirse un número transcendente; con este

fin consideraremos el conjunto de los números reales algebraicos dispuesto en forma de sucesión infinita y entonces aplicaremos el método utilizado en la demostración del Teorema 1, que determina un número real no perteneciente a esa sucesión. Este teorema de existencia no permite, desde luego, decidir si un número determinado es algebraico o transcendente.

Recordaremos que los números e y π son transcendentes, lo que se demuestra por métodos totalmente diferentes a los de este libro.

EJERCICIOS

1. Consideramos la transformación del plano en sí mismo, dada por el sistema de ecuaciones:

$$x = au + bv, \qquad y = cu + dv.$$

Dar las condiciones en los coeficientes a, b, c, d, para que esta transformación sea uno-uno.

2. ¿Es uno-uno la transformación homográfica del plano gaussiano (es decir, el plano de los números complejos junto con el punto del infinito), definida por

$$w = (az + b)/(cz + d)?$$

3. Supongamos que $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ es una sucesión dada de números reales. Sea

$$u_n = c_{n0} \cdot c_{n1} c_{n2} c_{n3} \ldots$$

el desarrollo decimal del número u_n en el que hay un número infinito de cifras distintas de 9.

Definimos el número $l = 0 \cdot e_1 e_2 e_3 \ldots$ de la siguiente forma: $e_n = 0$ si $c_{nn} \neq 0$, $c_n = 1$ si $c_{nn} = 0$. Demostrar que el número l no es un término de la serie $u_1, u_2, \ldots$, y deducir de aquí el Teorema 1 del párrafo 3.

4. Demostrar que el conjunto de todos los intervalos reales con los extremos racionales es numerable.

5. Decimos que una función f (con valores y argumentos reales) tiene un máximo estricto en el punto a si existe un intervalo bc conteniendo al punto a en su interior y tal que las condiciones $b < x < c$ y $x \neq a$ implican la desigualdad $f(x) < f(a)$. Demostrar que el conjunto de máximos estrictos de la función f es numerable.

Sugerencia: Dar a los puntos b y c valores racionales.

6. Demostrar que toda familia de intervalos disjuntos es numerable.

Sugerencia: Recuérdese que el conjunto de los números racionales es numerable.

7. Demostrar que el conjunto de los puntos de discontinuidad de una función monótona es numerable.

Sugerencia: Una función monótona tiene en cada punto un límite a la izquierda y uno a la derecha (que son diferentes en los puntos de discontinuidad). Luego, utilizar el Ejercicio 6.

8. Demostrar que el conjunto de esferas (en el espacio de 3 dimensiones) que tienen el radio racional y las coordenadas del centro también racionales es numerable.

9. Una relación $x\varrho y$ se llama relación de equivalencia si es reflexiva, simétrica y transitiva, es decir, si

$$x\varrho x, \qquad (x\varrho y) \Rightarrow (y\varrho x), \qquad (x\varrho y) \wedge (y\varrho z) \Rightarrow (x\varrho z).$$

Sea X un conjunto dado y ϱ una relación de equivalencia cuyas variables están en X. Dado un elemento x_0 de X, el conjunto $\mathrm{E}_x(x\varrho x_0)$ se llama un *conjunto de equivalentes* (o *clase de restos*); la familia de conjuntos de equivalentes se llama *conjunto cociente* X/ϱ. Demostrar que los elementos de X/ϱ son disjuntos y que X es su unión.

CAPÍTULO 6

Operaciones con números cardinales. Los números $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{c}$

Indicaremos la potencia del conjunto de los números naturales por $\mathfrak{a}$ y la potencia del conjunto de los números reales (la « potencia del continuo ») por $\mathfrak{c}$.

Los números $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{c}$ son los más importantes de los cardinales infinitos que intervienen en Análisis y en Geometría. Ya sabemos (Cap. 5.3, Teorema 1) que

(1) $$\mathfrak{a} \neq \mathfrak{c}.$$

Las operaciones con números cardinales arbitrarios, que definiremos ahora, nos interesan principalmente en su relación con los números $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{c}$.

6.1. Adición y multiplicación

La suma $\mathfrak{m} + \mathfrak{n}$ de dos números cardinales $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ es, por definición, la potencia de la unión de dos conjuntos disjuntos que tengan las potencias $\mathfrak{m}$ y $\mathfrak{n}$ respectivamente.

Por tanto, tenemos

(2) $$\overline{\overline{X}} + \overline{\overline{Y}} = \overline{\overline{X \cup Y}}, \quad \text{si} \quad X \cap Y = \emptyset.$$

Notemos que para cada par de conjuntos X e Y existe un par de conjuntos disjuntos X_1, Y_1, tales que $\overline{\overline{X_1}} = \overline{\overline{X}}$ e $\overline{\overline{Y_1}} = \overline{\overline{Y}}$. Pues, considerando dos elementos distintos cualesquiera a y b, nos basta tomar $X_1 = \{a\} \times X$ e $Y_1 = \{b\} \times Y$.

Teniendo presente esta observación se puede afirmar que para cada par de números cardinales la suma está definida de forma unívoca (independientemente de la elección de los conjuntos X e Y).

Definimos el *producto* $\mathfrak{m}\cdot\mathfrak{n}$ de $\mathfrak{m}$ y $\mathfrak{n}$ como la potencia del producto cartesiano de dos conjuntos que tienen potencias $\mathfrak{m}$ y $\mathfrak{n}$ respectivamente. Por lo tanto,

$$\overline{\overline{X}}\cdot\overline{\overline{Y}} = \overline{\overline{X \times Y}}. \tag{3}$$

Así, pues, el producto de números cardinales está definido unívocamente. Fácilmente puede demostrarse que las definiciones precedentes, en el caso en que $\mathfrak{m}$ y $\mathfrak{n}$ sean números naturales están de acuerdo con las definiciones usuales de adición y multiplicación en Aritmética. Deducimos, por los teoremas 2 y 3 (Cap. 5.3), que

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{a} = \mathfrak{a}, \qquad \mathfrak{a}\cdot\mathfrak{a} = \mathfrak{a}, \qquad \mathfrak{a} + n = \mathfrak{a}, \qquad \mathfrak{a}\cdot n = \mathfrak{a}, \tag{4}$$

en donde n es un número natural.

La multiplicación y la adición satisfacen las leyes asociativas y conmutativas. Se satisface también la ley distributiva:

$$\mathfrak{m}\cdot(\mathfrak{n} + \mathfrak{p}) = \mathfrak{m}\cdot\mathfrak{n} + \mathfrak{m}\cdot\mathfrak{p}. \tag{5}$$

En efecto, sean $\mathfrak{n} = \overline{\overline{X}}$, $\mathfrak{m} = \overline{\overline{Y}}$ y $\mathfrak{p} = \overline{\overline{Z}}$, en donde $Y \cap Z = \emptyset$.

Entonces (Cap. 3.4 (18) y (21)),

$$X \times (Y \cup Z) = X \times Y \cup X \times Z,$$

$$(X \times Y) \cap (X \times Z) = X \times (Y \cap Z) = \emptyset,$$

y, por tanto, $\overline{\overline{X \times (Y \cup Z)}} = \overline{\overline{X \times Y}} + \overline{\overline{X \times Z}}$, c. q. d.

Deducimos de esto (por inducción) que

$$\mathfrak{m}\cdot n = \mathfrak{m} + \mathfrak{m} + \ldots + \mathfrak{m}, \tag{6}$$

en donde el segundo miembro tiene n términos.

Pues, en efecto, la fórmula (6) es obvia para $n = 1$, y, en virtud de (5),

$$\mathfrak{m}\cdot(n + 1) = \mathfrak{m}\cdot n + \mathfrak{m}\cdot 1 = \mathfrak{m}\cdot n + \mathfrak{m}.$$

La igualdad (6) expresa que $\mathfrak{m}\cdot n$ es la potencia de la unión de n conjuntos disjuntos cada uno de los cuales de potencia $\mathfrak{m}$. Este aserto puede generalizarse a la suma de un número infinito de términos como sigue.

Sea $\overline{\overline{T}} = \mathfrak{n}$ *y sea* F *una función cuyos argumentos recorren el conjunto* T *y cuyos valores son conjuntos disjuntos de potencia* $\mathfrak{m}$, *esto es,*

$$\overline{\overline{F_t}} = \mathfrak{m}, \qquad F_t \cap F_{t'} = \emptyset \quad \text{para} \quad t \neq t'; \tag{7}$$

entonces

$$\overline{\overline{\bigcup_t F_t}} = \mathfrak{m}\cdot\mathfrak{n}. \tag{8}$$

En efecto, sea t_0 un elemento fijo en el conjunto T y sea g_t una aplicación uno-uno de F_{t_0} sobre F_t (aplicamos aquí el axioma de elección). Pongamos:

(9) $$f(x, t) = g_t(x), \quad \text{en donde} \quad x \in F_{t_0} \quad \text{y} \quad t \in T.$$

La función f es una aplicación uno-uno del producto cartesiano $F_{t_0} \times T$ sobre la unión $\bigcup_t F_t$. En efecto, sea

(10) $$f(x, t) = f(x', t'), \quad \text{es decir,} \quad g_t(x) = g_{t'}(x')$$

Si $t \neq t'$, entonces $g_t(x) \neq g_{t'}(x')$, ya que $g_t(x) \in F_t$, $g_{t'}(x') \in F_{t'}$, y $F_t \cap F_{t'} = \emptyset$.

Así, pues $t = t'$. Si $x \neq x'$, entonces $g_t(x) \neq g_{t'}(x')$, pues la función g_t es uno-uno.

Por tanto, la igualdad (10) implica que $t = t'$ y $x = x'$.

Así, pues, hemos demostrado que los conjuntos $F_{t_0} \times T$ y $\bigcup_t F_t$ tienen la misma potencia. Esto quiere decir que la fórmula (8) es válida.

6.2. Potenciación

Sean $\overline{\overline{X}} = \mathfrak{m}$ e $\overline{\overline{Y}} = \mathfrak{n}$. El número cardinal $\mathfrak{n}^{\mathfrak{m}}$ se define como la potencia del conjunto, que indicamos por Y^X, de todas las funciones cuyos argumentos recorren el conjunto X y cuyos valores pertenecen al conjunto Y, es decir,

$$\overline{\overline{Y}}^{\overline{\overline{X}}} = \overline{\overline{Y^X}}.$$

Las siguientes fórmulas, conocidas en la Aritmética de los números naturales, son también válidas en el caso de los cardinales.

(11) $$\mathfrak{n}^{\mathfrak{m}+\mathfrak{p}} = \mathfrak{n}^{\mathfrak{m}} \cdot \mathfrak{n}^{\mathfrak{p}},$$

(12) $$(\mathfrak{m}\mathfrak{n})^{\mathfrak{p}} = \mathfrak{m}^{\mathfrak{p}} \cdot \mathfrak{n}^{\mathfrak{p}},$$

(13) $$(\mathfrak{n}^{\mathfrak{m}})^{\mathfrak{p}} = \mathfrak{n}^{\mathfrak{m}\mathfrak{p}}.$$

En efecto, sean $\mathfrak{m} = \overline{\overline{X}}$, $\mathfrak{n} = \overline{\overline{Y}}$ y $\mathfrak{p} = \overline{\overline{T}}$.

Para probar la fórmula (11), debemos demostrar que:

(14) $$\overline{\overline{Y^{X \cup T}}} = \overline{\overline{Y^X \times Y^T}} \quad \text{supuesto} \quad X \cap T = \emptyset.$$

En efecto, sea $f \in Y^{X \cup T}$. Denotando por $f|X$ la función restringida de f, que se obtiene de esta función f cuando la variación de sus argumentos se limita al conjunto X, y dando un significado análogo al símbolo $f|T$ (Cap. 4.4), asignemos a la función f el par de funciones $\langle f|X, f|T \rangle$. Esta correspondencia, como se ve fácilmente, establece una correspondencia

uno-uno entre los elementos de los conjuntos $Y^{X \cup T}$ e $Y^X \times Y^T$, con lo que la fórmula (14) resulta demostrada.

La fórmula (12) quiere decir que:

(15) $$\overline{\overline{(X \times Y)^T}} = \overline{\overline{X^T \times Y^T}}.$$

Efectivamente, sea $f \in (X \times Y)^T$. Por tanto, los valores de la función f son pares ordenados pertenecientes a $X \times Y$, es decir,

$$f(t) = \langle g(t), h(t) \rangle, \quad \text{con} \quad g(t) \in X \quad \text{y} \quad h(t) \in Y.$$

Por lo tanto, $g \in X^T$ y $h \in Y^T$. Así hemos hecho corresponder a la función f un par de funciones $\langle g, h \rangle$ es decir, un elemento del conjunto $X^T \times Y^T$. Se comprueba fácilmente que esta correspondencia es uno-uno. Esto demuestra la igualdad (15).

Para establecer la (13) demostraremos que

(16) $$\overline{\overline{(Y^X)^T}} = \overline{\overline{Y^{X \times T}}}.$$

Sea $f \in Y^{X \times T}$. La función f es una función que hace corresponder a cada par $\langle x, t \rangle$ el elemento $f(x, t)$ del conjunto Y. Fijado un valor de t obtendremos una función g_t de la variable x definida por medio de la fórmula

$$g_t(x) = f(x, t),$$

es decir $g_t \in Y^X$, para cada valor de la variable t. Hemos definido así una función —la denotaremos por g— que a los elementos del conjunto T hace corresponder elementos del conjunto Y^X, es decir, $g \in (Y^X)^T$.

A cada función f del conjunto $Y^{X \times T}$ le hemos asignado de este modo una función g perteneciente al conjunto $(Y^X)^T$. Se ve fácilmente que esta correspondencia es uno-uno.

Consideraremos ahora ciertos casos particulares.

Es casi obvio que

(17) $$\mathfrak{n}^1 = \mathfrak{n}$$

(en este caso el conjunto de los argumentos tiene un único elemento).

Sea m un número natural. Por (11) y (17) tenemos

$$\mathfrak{n}^{m+1} = \mathfrak{n}^m \cdot \mathfrak{n}^1 = \mathfrak{n}^m \cdot \mathfrak{n},$$

y por tanto (por inducción),

(18) $$\mathfrak{n}^m = \mathfrak{n} \cdot \mathfrak{n} \cdot \ldots \cdot \mathfrak{n},$$

en donde el segundo miembro tiene m factores.

Se sigue de esto que la anterior definición de potenciación de los números cardinales coinciden con la definición aritmética cuando esos números son finitos ($\mathfrak{m} = m$, $\mathfrak{n} = n$).

Supongamos ahora que $\mathfrak{n} = 2$. Sean, pues, $\overline{\overline{X}} = \mathfrak{m}$, e $Y = \{0, 1\}$ (Y es el conjunto formado por dos números: 0 y 1). En consecuencia el conjunto Y^X es el conjunto de las funciones definidas en X y que toman sólo dos valores 0 y 1 (y tal vez sólo uno de ellos). Llamamos antes a tales funciones, funciones *características* (ver Cap. 4, Ejercicio 8); concretamente, una función que satisface la condición

$$(19) \qquad f(x) = \begin{cases} 1 & \text{para} \quad x \in A, \\ 0 & \text{para} \quad x \in X - A \end{cases}$$

es la función característica del conjunto A.

El conjunto $\{0, 1\}^X$ *y el conjunto de todos los subconjuntos del conjunto* X *son de igual potencia, que es* $2^{\mathfrak{m}}$, *en donde* $\mathfrak{m} = \overline{\overline{X}}$.

Demostración. Asignemos al conjunto $A \subset X$ su función característica f_A. Esta correspondencia es uno-uno: Sea $A \neq B$ y $a \in A - B$. Será, pues, $f_A(a) = 1$ pero $f_B(a) = 0$ y por tanto $f_A \neq f_B$. Luego, cada función característica ha sido asignada a algún subconjunto del conjunto X.

Demostraremos ahora el siguiente teorema:

Teorema de Cantor. $2^{\mathfrak{m}} \neq \mathfrak{m}$; en otras palabras, *ningún conjunto* X *tiene igual potencia que la familia de todos sus subconjuntos.*

Demostración. Es suficiente demostrar que si F es una función cuyos argumentos recorren el conjunto X y cuyos valores son subconjuntos del conjunto X, existe algún conjunto $Z \subset X$ que no es un valor de esa función. (Este es el también llamado *teorema diagonal*). De ahí se deduce el teorema de Cantor, porque si el conjunto X fuera de potencia igual a la de la familia de todos sus subconjuntos, entonces existiría un función uno-uno F cuyos argumentos recorrerrían el conjunto X y que tomaría como valores todos los subconjuntos del conjunto X.

Definimos el conjunto Z como sigue:

$$(20) \qquad Z = \mathbf{E}_x[x \notin F(x)].$$

Debemos demostrar que $Z \neq F(x)$ para todo $x \in X$. Supongamos que, por el contrario, sea $Z = F(x_0)$. Ahora, por (20), se tiene la siguiente equivalencia:

$$(x \in Z) \equiv [x \notin F(x)].$$

Haciendo $x = x_0$ en esta equivalencia, obtenemos

$$(x_0 \in Z) \equiv [x_0 \notin F(x_0)],$$

y por tanto, $Z \neq F(x_0)$. Hemos llegado así a una contradicción.

Observaciones: 1. El teorema diagonal puede ilustrarse geométricamente como sigue. Sea X el intervalo cerrado $0 \leq x \leq 1$. Ponemos el conjunto $F(x)$, que por hipótesis es un subconjunto de este intervalo, en la vertical que pasa por el punto x. De esta manera obtenemos un conjunto plano: $M = \mathbf{E}_{x,y}[y \in F(x)]$ contenido en el cuadrado $X \times X$. Denotemos por P la diagonal de este cuadrado. Entonces, el conjunto Z es la proyección del conjunto $P - M$ sobre el eje X.

2*. La anterior demostración del Teorema de Cantor permite establecer fácilmente que la familia de todos los subconjuntos del conjunto X no tiene la misma potencia que ninguno de los subconjuntos de X.

De esto se sigue inmediatamente que *no existe el conjunto de todos los conjuntos* (pues la familia de sus subconjuntos debería ser uno de sus propios subconjuntos).

Esta misma conclusión se deduce con facilidad del teorema diagonal. Pues, si existiese un conjunto X cuyos elementos fuesen todos los conjuntos, entonces, la función F definida por la condición $F(x) = x$ (es decir, la identidad) tomaría obviamente como valores todos los subconjuntos del conjunto X (ya que estos conjuntos serían elementos del conjunto X).

Digamos también que de la (falsa) hipótesis de que existe el conjunto de todos los conjuntos se sigue la existencia de

$$Z = \mathbf{E}_x(x \notin x).$$

Ahora bien, la existencia del conjunto Z conduce inmediatamente a una contradicción (que es la llamada *antinomia de Russell*) porque

$$x \in Z \equiv x \notin x, \quad \text{y por consiguiente} \quad Z \in Z \equiv Z \notin Z.$$

El teorema de la no existencia del conjunto de todos los conjuntos ha sido deducido por nosotros de los axiomas dados en el Capítulo 3.7. La hipótesis de que para un conjunto dado A, la función proposicional $\varphi(x)$ (con dominio no restringido de variación para x) determina el conjunto $\mathbf{E}_x\varphi(x) \wedge (x \in A)$, juega un papel esencial en la formulación del axioma V. Omitiendo la expresión $x \in A$ nos llevaría a una contradicción, pues tomando como $\varphi(x)$ la función proposicional « x es un conjunto » obtendríamos como consecuencia inmediata la existencia del conjunto de todos los conjuntos que, como vimos, nos lleva a una contradicción.

Notemos que en el período anterior a la axiomatización de la Teoría de conjuntos, esto es, en el que llamamos época « ingenua » de la Teoría de conjuntos, era común admitir como obvia la existencia del conjunto $\mathbf{E}_x\varphi(x)$ para toda función proposicional $\varphi(x)$. Esto ha llevado a las contradicciones que mencionabamos ya antes (que eran llamadas antinomias de la Teoría de conjuntos), por lo que se hizo necesario revisar los fundamentos de la

teoría. En consecuencia se ha conseguido (desde 1904) una teoría axiomática de conjuntos que elimina estas antinomias.

6.3. Desigualdades entre números cardinales

Sean $\overline{\overline{X}} = \mathfrak{m}$ e $\overline{\overline{Y}} = \mathfrak{n}$. Escribiremos que $\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{n}$ si el conjunto X tiene la misma potencia que algún subconjunto del conjunto Y. Por tanto,

$$(X \subset Y) \Rightarrow (\overline{\overline{X}} \leqslant \overline{\overline{Y}}).$$

Si $\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{n}$ y $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{n}$ escribimos $\mathfrak{m} < \mathfrak{n}$.

En virtud de (1) tenemos

(21) $$\mathfrak{a} < \mathfrak{c}.$$

Podemos formular el teorema de Cantor (apartado 2) en la forma

(22) $$\mathfrak{m} < 2^{\mathfrak{m}}.$$

En efecto, $\mathfrak{m} \neq 2^{\mathfrak{m}}$, y al mismo tiempo $\mathfrak{m} \leqslant 2^{\mathfrak{m}}$ porque el conjunto X tiene la misma potencia que la familia de todos sus subconjuntos de un elemento.

Se demuestran fácilmente las siguientes fórmulas:

(23) si $\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{n}$ y $\mathfrak{n} \leqslant \mathfrak{p}$, es $\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{p}$,

(24) si $\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{n}$, es $\mathfrak{m} + \mathfrak{p} \leqslant \mathfrak{n} + \mathfrak{p}$,

(25) si $\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{n}$, es $\mathfrak{m}\mathfrak{p} \leqslant \mathfrak{n}\mathfrak{p}$,

(26) si $\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{n}$, es $\mathfrak{m}^{\mathfrak{p}} \leqslant \mathfrak{n}^{\mathfrak{p}}$,

(27) si $\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{n}$, es $\mathfrak{p}^{\mathfrak{m}} \leqslant \mathfrak{p}^{\mathfrak{n}}$.

Demostraremos ahora el fundamental *Teorema de Cantor-Bernstein:*

(28) *Si* $\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{n}$ *y* $\mathfrak{n} \leqslant \mathfrak{m}$, es $\mathfrak{m} = \mathfrak{n}$.

Demostración. (Haremos uso de algunas simplificaciones que han sido introducidas recientemente por M. Reichbach). Sea $\overline{\overline{X}} = \mathfrak{m}$. Puesto que $\mathfrak{n} \leqslant \mathfrak{m}$, el conjunto X tiene un subconjunto Y de potencia $\mathfrak{n}$. Pero puesto que $\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{n}$, el conjunto X es de potencia igual a la de algún subconjunto del conjunto Y; es decir existe una función f uno-uno definida en X y tal que:

(29) $$f(X) \subset Y \subset X.$$

Vamos a definir una aplicación uno-uno de X sobre Y.

Pongamos:

(30) $$Z = Y - f(X), \qquad S = Z \cup f(Z) \cup ff(Z) \cup \ldots$$

(Véase la figura 4, en donde X es el rectángulo más grande, Y es el segundo en medida, $f(X)$ es el tercero, y así sucesivamente; $X - S$ es la parte sombreada).

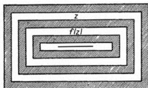


FIG. 4.

Definiremos la función g como sigue:

(31) $$g(x) = \begin{cases} x & \text{para } x \in S, \\ f(x) & \text{para } x \in X - S. \end{cases}$$

Demostraremos primero que se tiene la siguiente igualdad:

(32) $$g(X) = Y.$$

Puesto que $S \subset X$, será

(33) $$X = S \cup (X - S).$$

Por tanto,

(34) $$g(X) = g(S) \cup g(X - S) = S \cup f(X - S)$$

en virtud de (31). Al mismo tiempo (en virtud de (30) y Cap. 4.4, (14)):

$$f(S) = f(Z) \cup ff(Z) \cup fff(Z) \cup \ldots,$$

y esto llevado a (30):

(35) $$S = Z \cup f(S).$$

De esto y (34) y (33), obtenemos las igualdades:

$$g(X) = S \cup f(X - S) = Z \cup f(S) \cup f(X - S) = Z \cup f(X),$$

pero atendiendo a (30) tendremos,

$$Z \cup f(X) = [Y - f(X)] \cup f(X) = Y.$$

Hemos demostrado así la fórmula (32).

Queda por demostrar que la función g es uno-uno. Puesto que esta función (conforme a (31)) es uno-uno sobre cada uno de los conjuntos S y $X - S$ individualmente, basta demostrar ahora que

(36) $$g(S) \cap g(X - S) = \emptyset.$$

Ahora bien, por (31) tenemos.

(37) $$g(S) = S \quad \text{y} \quad g(X - S) = f(X - S) = f(X) - f(S);$$

al mismo tiempo, $f(X) = f(X) - Z$ pues $f(X) \cap Z = \emptyset$, y de aquí:

$$f(X) - f(S) = f(X) - [Z \cup f(S)] = f(X) - S,$$

por (35).

Luego, tenemos que $S \cap [f(X) - f(S)] = \emptyset$, de donde sigue la fórmula (36), en virtud de (37).

Hemos demostrado con esto el Teorema de Cantor-Bernstein.

Otra forma de este teorema, frecuentemente utilizado en las aplicaciones, es la siguiente:

(38) Si $A \subset B \subset C$ y $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{C}}$, entonces $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}} = \overline{\overline{C}}$.

El siguiente Teorema es válido para funciones arbitrarias:

Si X es el conjunto de los argumentos de la función f, es

(39) $$\overline{\overline{f(X)}} \leqslant \overline{\overline{X}}.$$

Para demostrarlo, sea $y \in f(X)$ y sea $g(y)$ un elemento arbitrario del conjunto $f^{-1}(y)$ (hacemos aquí uso del axioma de elección). Puesto que los conjuntos $f^{-1}(y)$ para diversos y son disjuntos, la función g determina una aplicación uno-uno del conjunto $f(X)$ sobre un subconjunto del conjunto X. De esto se sigue la fórmula (39).

6.4. Propiedades del número $\mathfrak{c}$

Hemos definido el número $\mathfrak{c}$ como la potencia del conjunto $\mathcal{E}$ de todos los números reales. Notemos que, como expusimos en el Capítulo 5.2, *cualquier intervalo abierto $a < x < b$ tiene potencia $\mathfrak{c}$.*

El intervalo $a \leqslant x \leqslant b$ (en donde $a < b$) tiene también potencia $\mathfrak{c}$. Esto se sigue inmediatamente de la fórmula (28), puesto que:

$$\mathbf{E}_x(a < x < b) \subset \mathbf{E}_x(a \leqslant x \leqslant b) \subset \mathcal{E},$$

y por tanto

$$\mathfrak{c} = \overline{\overline{\mathbf{E}_x(a < x < b)}} \leqslant \overline{\overline{\mathbf{E}_x(a \leqslant x \leqslant b)}} \leqslant \overline{\overline{\mathcal{E}}} = \mathfrak{c}.$$

Además, también se deduce de la fórmula (28) que:

(40) $\mathfrak{c} = \mathfrak{c} + n = \mathfrak{c} + \mathfrak{a} = \mathfrak{c} + \mathfrak{c} = \mathfrak{n} \cdot \mathfrak{c}$ (siendo n un número natural);

pues (cfr. (24)) $\mathfrak{c} \leqslant \mathfrak{c} + n \leqslant \mathfrak{c} + \mathfrak{a} \leqslant \mathfrak{c} + \mathfrak{c}$ y $\mathfrak{c} + \mathfrak{c} \leqslant \mathfrak{c}$, ya que $\mathfrak{c} + \mathfrak{c}$ es la potencia del conjunto

$$\mathbf{E}_x(0 < x < 1) \cup \mathbf{E}_x(1 < x < 2).$$

que es un subconjunto del conjunto $\mathcal{E}$.

La generalización a n términos se obtiene inmediatamente por inducción.

(41) $$2^{\mathfrak{a}} = \mathfrak{c}.$$

En efecto: Sea el conjunto de todas las sucesiones infinitas formadas con las cifras 0 y 1. Por tanto $\overline{\overline{A}} = 2^{\mathfrak{a}}$. Sea B el subconjunto del conjunto A constituido por las sucesiones con un número infinito de ceros. A la sucesión $t = (t_1, t_2, \ldots)$ perteneciente a B le asignamos el número:

$$f(t) = t_1/2 + t_2/4 + \ldots + t_n/2^n + \ldots, \quad \text{es decir,} \quad f(t) = (0{\cdot}t_1 t_2 \ldots)_2,$$

y si $t \in A - B$,

$$f(t) = 1 + t_1/2 + t_2/4 + \ldots + t/_n 2^n + \ldots, \quad \text{es decir,} \quad f(t) = (1{\cdot}t_1 t_2 \ldots)_2$$

(en el sistema binario de numeración).

Se comprueba fácilmente que la función f es uno-uno. Al mismo tiempo,

$$\mathbf{E}_x(0 < x < 1) \subset f(A) \subset \mathcal{E},$$

y por tanto, $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{f(A)}} = \mathfrak{c}$ en virtud de (38).

Deducimos de esto que

(42) $$\mathfrak{a}^{\mathfrak{a}} = \mathfrak{c} = \mathfrak{c}^{\mathfrak{a}},$$

porque (cfr. (26)) $2^{\mathfrak{a}} \leqslant \mathfrak{a}^{\mathfrak{a}} \leqslant \mathfrak{c}^{\mathfrak{a}} = (2^{\mathfrak{a}})^{\mathfrak{a}} = 2^{(\mathfrak{a}^2)} = 2^{\mathfrak{a}}$.

Análogamente tenemos

(43) $$n^{\mathfrak{a}} = \mathfrak{c} \quad \text{para} \quad n \geqslant 2.$$

La fórmula $\mathfrak{a}^{\mathfrak{a}} = \mathfrak{c} = n^{\mathfrak{a}}$ expresa que el conjunto de todas las sucesiones infinitas cuyos términos son números naturales (o cuyos términos son $1, 2, \ldots, n$) es de potencia $\mathfrak{c}$.

Deducimos ahora por (42), que

(44) $$\mathfrak{c} = \mathfrak{c}{\cdot}\mathfrak{a} = \mathfrak{c}{\cdot}\mathfrak{c} = \mathfrak{c}^n = \mathfrak{c}^{\mathfrak{a}} \quad (n \text{ es un número natural} > 1).$$

En efecto,

$$\mathfrak{c} \leqslant \mathfrak{c}{\cdot}\mathfrak{a} \leqslant \mathfrak{c}{\cdot}\mathfrak{c} \leqslant \mathfrak{c}^n \leqslant \mathfrak{c}^{\mathfrak{a}} = \mathfrak{c}.$$

Notemos que $\mathfrak{c}^2$ es la potencia del conjunto de puntos que constituyen el plano, y más generalmente, $\mathfrak{c}^n$ es la potencia del espacio euclídeo n-dimensional $\mathcal{E}^n$. La fórmula (44) expresa que el conjunto de todas las sucesiones infinitas cuyos términos son números reales (o el producto cartesiano infinito $\mathcal{E} \times \mathcal{E} \times \ldots$) tiene también potencia $\mathfrak{c}$.

Damos, por último, otra fórmula relativa a los números $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{c}$:

(45) $$2^{\mathfrak{c}} = \mathfrak{a}^{\mathfrak{c}} = \mathfrak{c}^{\mathfrak{c}}.$$

En efecto: $\mathfrak{c}^{\mathfrak{c}} = (2^{\mathfrak{a}})^{\mathfrak{c}} = 2^{\mathfrak{ac}} = 2^{\mathfrak{c}}$ pues $\mathfrak{ac} = \mathfrak{c}$ por (44).

Hagamos $2^{\mathfrak{c}} = \mathfrak{f}$. En virtud de (22), $2^{\mathfrak{c}} > \mathfrak{c}$; $\mathfrak{f}$ es por tanto un número cardinal mayor que $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{c}$. La fórmula (45) expresa que $\mathfrak{f}$ es la potencia de la familia de todos los subconjuntos de la recta real (o más generalmente de la familia de todos los subconjuntos del espacio $\mathcal{E}^n$); es al mismo tiempo la potencia del conjunto de todas las funciones reales de una variable real (así como la potencia del conjunto de todas las funciones de una variable real cuyos valores son números naturales).

Nota. Vamos a dar aquí una demostración directa de la fórmula $\mathfrak{c}^2 = \mathfrak{c}$, a causa de su importancia fundamental.

Sea A un cuadrado determinado por las condiciones $0 < x < 1$ y $0 < y < 1$. Ya que $\overline{\overline{A}} = \mathfrak{c}^2$, nuestro problema consiste en la definición de una función uno-uno real definida sobre el cuadrado A (se seguirá de esto que $\mathfrak{c}^2 \leq \mathfrak{c}$; la desigualdad $\mathfrak{c} \leq \mathfrak{c}^2$ es obvia).

Expresemos los números x e y en sus desarrollos decimales esencialmente infinitos (es decir, con un número infinito de cifras distintas de 0):

$$x = 0{\cdot}a_1a_2\ldots, \qquad y = 0{\cdot}b_1b_2\ldots,$$

y sea:

(46) $$f(x, y) = 0{\cdot}a_1b_1a_2b_2\ldots a_nb_n\ldots$$

Debemos demostrar que si $f(x, y) = f(\bar{x}, \bar{y})$, entonces $x = \bar{x}$ e $y = \bar{y}$.

Ahora bien, el desarrollo (46) contiene un número infinito de cifras diferentes de cero; por otra parte, ningún número tiene dos desarrollos diferentes esencialmente infinitos y por tanto la igualdad:

$$f(x, y) = 0{\cdot}a_1b_1a_2b_2\ldots = 0{\cdot}\bar{a}_1\bar{b}_1\bar{a}_2\bar{b}_2\ldots = f(\bar{x}, \bar{y})$$

implica que:

$$a_1 = \bar{a}_1, \qquad b_1 = \bar{b}_1, \qquad a_2 = \bar{a}_2, \qquad b_2 = \bar{b}_2, \quad \ldots,$$

es decir $x = \bar{x}$ e $y = \bar{y}$.

EJERCICIOS

1. Sea $\mathbf{R}$ una familia de conjuntos, todos ellos de potencia $\mathfrak{c}$ y $\overline{\overline{\mathbf{R}}} = \mathfrak{c}$. Demostrar que $\overline{\overline{S(\mathbf{R})}} = \mathfrak{c}$.

2. Sea $\overline{\overline{A_n}} = \mathfrak{c}$ para $n = 1, 2, \ldots$ demostrar que $\overline{\overline{A_1 \times A_2 \times \ldots}} = \mathfrak{c}$.

3. Sean $\overline{\overline{T}} = \mathfrak{n}$ y $\overline{\overline{F_t}} = \mathfrak{m}$ para cada $t \in T$. Calcular $\overline{\overline{\mathbf{P}_tF_t}}$.

4. Demostrar que una condición necesaria y suficiente para que el conjunto A sea equipotente con uno de sus subconjuntos propios (es decir algún subconjunto distinto de A) es que $\mathfrak{a} \leq \overline{\overline{A}}$.

Sugerencia: Para la demostración de ser necesario, tomar en consideración un elemento $a \in A - f(A)$ luego $f(a)$, $ff(a)$, y así sucesivamente. En la demostración de ser suficiente, considerar la sucesión $a_1, a_2, \ldots$ contenida en A y la función f definida como sigue:

$$f(x) = x \quad \text{para} \quad x \neq a_n \quad (n = 1, 2, \ldots) \quad \text{y} \quad f(a_n) = a_{n+1}.$$

CAPÍTULO **7**

Relaciones de orden

7.1. Relaciones de orden

DEFINICIÓN. Sean dados un conjunto A y una relación entre sus elementos, es decir una función proposicional $\varphi(x, y)$ de dos variables cuyo dominio de variación es, para cada una, el conjunto A. Decimos que esta relación establece una *ordenación* (o una simple ordenación) del conjunto A (y entonces en lugar de $\varphi(x, y)$ escribiremos $x \precsim y$ que se lee: x precede a y), si se satisfacen las siguientes condiciones:

1. Si $a \precsim b$, no se cumple la relación $b \precsim a$,
2. Si $a \precsim b$, y $b \precsim c$, también $a \precsim c$,
3. Si $a \neq b$, entonces $a \precsim b$ o $b \precsim a$. (*)

Por ejemplo, la relación «menor que» $x < y$ de la Aritmética usual (y análogamente la relación $x > y$) establece una ordenación del conjunto de los números reales, así como de cualquier subconjunto de éste.

7.2. Semejanza. Tipos de orden

Decimos que la relación $\precsim$ que ordena el conjunto A y la relación $\precsim^*$ que ordena el conjunto A^* establecen una ordenación *semejante*, si existe una aplicación uno-uno f (llamada *aplicación de semejanza*) del conjunto A^* sobre el conjunto A que satisface la identidad

$$(x \precsim y) \equiv (f(x) \precsim^* f(y)),$$

es decir, el elemento x precede al elemento y en el conjunto A siempre y cuando el elemento $f(x)$ preceda al elemento $f(y)$ en el conjunto A^*.

(*) En otros autores no se exige tanto para hablar de *ordenación* de un conjunto, y a la definida aquí la califican de *estricta* (por 1) y de *total* (por 3). — *N. del T.*

Por ejemplo, la relación «menor que» establece una ordenación semejante del conjunto de los números naturales y el conjunto de los números de la forma $1 - 1/n$.

De forma análoga a como asignamos los números cardinales a los conjuntos, asignaremos los *tipos de orden* a las relaciones de orden o, como también se dice a los conjuntos ordenados. Para ello asignaremos el mismo tipo de orden a dos conjuntos, siempre y cuando sean semejantes. Son válidas las leyes reflexiva, transitiva y simétrica de la relación de semejanza, es decir,

a) todo conjunto ordenado es semejante a sí mismo,

b) si el conjunto A es semejante al B, el conjunto B es semejante al A,

c) si el conjunto A es semejante al B y el conjunto B es semejante al C, también el conjunto A es semejante al C.

Omitimos las sencillas demostraciones de estas propiedades.

Los tipos de orden siguientes son los más importantes: ω — el tipo de orden del conjunto de los números naturales; ω^* — el tipo de orden del conjunto de los enteros negativos; η — el tipo de orden del conjunto de los números racionales; y λ — el tipo de orden del conjunto de los números reales (considerando que los conjuntos dichos vienen ordenados por la relación «menor que», conocida de la Aritmética elemental).

El tipo de orden de un conjunto finito que conste de n elementos, se indica por n.

Teorema. *Todo conjunto numerable ordenado A es semejante a algún subconjunto del conjunto R de todos los números racionales (ordenados con respecto a la relación «menor que»).*

Ordenemos los elementos del conjunto A en una sucesión

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

de términos distintos (suponemos que A es infinito; para conjuntos finitos el teorema es obvio).

Definiremos una aplicación semejante f de A sobre un subconjunto de R, de la forma siguiente.

Sea $f(a_1) = 0$; $f(a_2)$ está definido como un número racional (arbitrario) que es menor que $f(a_1)$ si $a_2 \lesssim a_1$, pero mayor que $f(a_1)$, si $a_1 \lesssim a_2$. La definición inductiva del número $f(a_{n+1})$ es la siguiente: si, en el conjunto A, a_{n+1} precede a todos los elementos $a_1, a_2, \ldots, a_n$, entonces, $f(a_{n+1})$ es un número racional menor que todos los números $f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_n)$; análogamente, si a_{n+1} sigue a todos los elementos $a_1, a_2, \ldots, a_n$, entonces el número $f(a_{n+1})$ es mayor que los $f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_n)$; finalmente, si no se tiene ninguno de estos casos, sea a_k el último entre estos elementos

$a_1, a_2, \ldots, a_n$, que precede a a_{n+1} y sea a_m el primero que sigue a a_{n+1}; entonces pongamos:

$$f(a_{n+1}) = \{f(a_k) + f(a_m)\}/2.$$

La función f definida de esta forma es obviamente uno-uno. Por otra parte, para cada n es una transformación semejante del conjunto

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}\}$$

sobre el conjunto $\{f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_{n+1})\}$. Pero de esto se sigue que la función f es una aplicación semejante del conjunto entero A sobre $f(A)$. Pues si $a_i \precneqq a_j$ entonces, denotando por $n+1$ el mayor de los números i y j, deducimos por la semejanza de los conjuntos $\{a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}\}$ y $\{f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_{n+1})\}$ que $f(a_i) < f(a_j)$.

7.3. Ordenación densa

Decimos que una ordenación del conjunto A es *densa*, si entre cada par de sus elementos puede encontrarse un elemento intermedio; es decir, siempre que $a \precneqq b$ existe un c tal que $a \precneqq c$ y $c \precneqq b$.

Un ejemplo de ordenación densa es la ordenación de los números racionales (con respecto a la relación « menor que »). Añadiremos que todo conjunto numerable con ordenación densa, sin un primer ni un último elemento es de tipo η. (Para una demostración, ver Hausdorff, *Set Theory*, Capítulo 3.11, Teorema 4).

7.4. Ordenación continua

Con el fin de dar una forma más clara a la definición de ordenación continua, introduciremos las siguientes definiciones auxiliares.

Un subconjunto B de un conjunto ordenado A se dice que es un *intervalo inicial* de A si juntamente con cada uno de sus elementos $x \in B$, contiene a todos los elementos del conjunto A que preceden a x; es decir, si

$$(y \precneqq x \in B) \Rightarrow (y \in B).$$

Dado un conjunto $Z \subset A$, el primer elemento a del conjunto A que satisface a la condición

$$(x \in Z) \Rightarrow (x \preceq a)$$

(si existe) se llama *cota superior mínima* de Z.

Ahora bien, diremos que una ordenación del conjunto A es *continua* si es densa y, además, para cada uno de sus intervalos iniciales B no vacío y distinto de A existe una cota superior mínima.

El conjunto $\mathcal{C}$ de todos los números reales es de tipo continuo. La comprobación de este hecho se reduce a una formulación diferente del conocido axioma de continuidad de Dedekind.

La ordenación del conjunto de los números racionales no es continua; para convencerse de ello, basta considerar el conjunto B constituido por los números racionales menores que $\sqrt{2}$ (por esto se dice también que $\sqrt{2}$ determina una «cortadura» a través de un «hueco» del conjunto de los números racionales).

Nota: El siguiente teorema, que enunciamos aquí sin demostración, contiene la parte más esencial de la teoría de los números irracionales debida a Dedekind.

Sea A el conjunto de todos los números racionales y sea $\mathbf{K}$ la familia de todos sus intervalos iniciales no vacíos, distintos de A, y que no tienen un elemento último. Entonces, la relación de inclusión (con exclusión de la igualdad) establece en la familia $\mathbf{K}$ una ordenación de tipo λ.

Por tanto, los números reales pueden definirse como los intervalos iniciales del conjunto R de los números racionales que sean no vacíos, distintos de R, y sin último elemento.

EJERCICIOS

1. Sean X e Y dos subconjuntos de un conjunto ordenado A. Se dice que el par $<X, Y>$ es una *cortadura* en el conjunto A, cuando $X \cup Y = A$, $X \cap Y = \emptyset$ y $(x \in X) \wedge (y \in Y) \Rightarrow (x \prec y)$.

Demostrar que si $<X_1, Y_1>$ y $<X_2, Y_2>$ son dos cortaduras en el conjunto A, o es $X_1 \subset X_2$, o es $X_2 \subset X_1$.

2. Decimos que una familia de conjuntos $\mathbf{R}$ es monótona si para cada par de conjuntos X e Y pertenecientes a $\mathbf{R}$, o es $X \subset Y$, o es $Y \subset X$. Una ordenación natural de esta familia es la establecida con respecto a la relación $X \subset Y \neq X$.

Demostrar que todo conjunto ordenado es semejante a alguna familia monótona de subconjuntos de este conjunto.

3. Sea $\mathbf{R}$ una familia monótona de subconjuntos del conjunto Z. Demostrar que la familia de todos los conjuntos $S(\mathbf{X})$ y $P(\mathbf{X})$ donde $\mathbf{X} \subset \mathbf{R}$, es también monótona.

4. Dar un ejemplo de un conjunto ordenado que no sea de tipo ω pero que, a pesar de esto, posea un primer elemento y sea tal que cada elemento tenga uno inmediatamente siguiente y (excepto el primero) uno inmediatamente anterior.

5. Un subconjunto G de un conjunto ordenado A se dice que es denso con respecto a A si entre cada dos elementos x e y del conjunto A existe un elemento z del conjunto G.

Demostrar que un conjunto A de tipo λ contiene una parte numerable que es densa con respecto a A.

6. Establezcamos una ordenación del conjunto $\mathcal{E}^2$ de todos los números complejos, diciendo que de dos números complejos con partes imaginarias distintas es anterior al que tenga parte imaginaria menor, y de dos números con partes imaginarias iguales es anterior al que tiene menor parte real.

Demostrar que en el conjunto $\mathcal{E}^2$ no existe una parte numerable que sea densa con respecto a $\mathcal{E}^2$.

7. Decimos que una relación que satisface las condiciones 1.ª y 2.ª, párrafo 1, establece una ordenación parcial.

Demostrar que:

(a) Toda familia de conjuntos es parcialmente ordenada respecto a la relación de inclusión: $X \subset Y \neq X$.

(b) La familia de todas las sucesiones infinitas de términos reales puede ser ordenada parcialmente de la siguiente forma: consideramos que la sucesión $a_1, a_2, \ldots$ precede a la sucesión $b_1, b_2, \ldots$ si existe un k tal que $a_n < b_n$ para $n > k$.

(c) Una familia de funciones reales esta ordenada parcialmente por la relación

$$(f \prec g) \equiv \wedge_x[f(x) \leqslant g(x)] \wedge (f \neq g).$$

8. Un conjunto parcialmente ordenado se dice que es un *retículo* si existen cota superior mínima y cota inferior máxima para cada par arbitrario de sus elementos (la definición del c. s. m. fue dada en el párrafo 4; la definición c. i. m. es análoga).

Demostrar que:

(a) La familia de todos los subconjuntos de un conjunto dado es un retículo respecto a la relación de inclusión $X \subset Y \neq X$.

(b) La familia de funciones considerada en el ejercicio 7 (c) es un retículo.

(c) La familia de todos los subconjuntos lineales del espacio euclídeo de dimensión b (es decir de rectas, planos y, en general espacios euclídeos de dimensión $k < n$ que contienen el origen del sistema de coordenadas) es un retículo respecto a la relación de inclusión. ¿Cuál es la significación geométrica de la c. s. m. y la c. i. m.?

9. *(N. del T.)*: Se llama *filtro* en E a una familia $\mathcal{F}$ de partes de E que cumple estas condiciones:

1) La intersección de dos elementos $\mathcal{F}$ también pertenece a $\mathcal{F}$.
2) Si $F \in \mathcal{F}$ y $E \supset X \supset F$, también $X \in \mathcal{F}$.
3) El conjunto vacío no pertenece a $\mathcal{F}$.

Demostrar que constituyen filtros:

a) El conjunto de las partes de E que contienen a una parte dada A no vacía.

b) El conjunto de los complementarios de los subconjuntos finitos de un conjunto infinito E.

c) El conjunto de los complementarios de las partes numerables de un conjunto no numerable E.

Capítulo **8**

Buena ordenación

8.1. Buena ordenación

Definición. Decimos que una ordenación de un conjunto A es una *buena ordenación* si cada subconjunto no vacío del conjunto A tiene un primer elemento.

A los tipos de orden de los conjuntos bien ordenados se les llama *números ordinales.*

Ejemplos. El conjunto de todos los números naturales es un conjunto bien ordenado (esto se sigue directamente del principio de inducción finita). Por tanto, ω es un número ordinal. En cambio, ninguno de los tipos de orden ω^*, η, λ, son números ordinales.

Se sigue de la definición de buena ordenación que todo subconjunto de un conjunto bien ordenado es bien ordenado. También se sigue que para cada elemento a de un conjunto bien ordenado (con excepción del último elemento, supuesto que el conjunto tiene un último elemento) existe un elemento b que es su inmediato sucesor o, como también se dice, el elemento siguiente. Precisamente, b es el primer elemento del conjunto $\mathbf{E}_x(a \prec x)$.

Un conjunto bien ordenado puede contener un elemento (distinto de su primer elemento) para el que no exista un elemento inmediato anterior, esto es, elemento precedente. Por ejemplo, el conjunto de números $1 - 1/n$ ($n = 1, 2, \ldots$) junto con el número 1, es bien ordenado, pero no existe en este conjunto el elemento inmediatamente anterior al número 1.

Si el conjunto A es bien ordenado, entonces, para cada intervalo inicial B que sea distinto del A existe un elemento b, y sólo uno, en A tal que:

$$B = \mathbf{E}_x(x \prec b).$$

Efectivamente, b es el primer elemento del conjunto $A - B$. Es por tanto la c. s. m. del intervalo B si B no tiene un último elemento; pero

si B tiene un último elemento, b es el elemento que sigue inmediatamente a ese.

Pongamos ahora

(1) $$P(a) = \mathbf{E}_x(x \precneqq a).$$

Hemos establecido así una correspondencia uno-uno entre los elementos del conjunto A y la familia $\mathbf{R}$ de todos los intervalos iniciales del conjunto A distintos de A.

Esta correspondencia expresa la semejanza del conjunto A y la familia $\mathbf{R}$ (ordenada con respecto a la relación de inclusión $X \subset Y$, $X \neq Y$). Pues, si $a \precneqq b$, entonces $x \precneqq a \Rightarrow x \precneqq b$, es decir, $P(a) \subset P(b)$; y también $P(a) \neq P(b)$ para $a \in P(b)$ y $a \notin P(a)$.

8.2. Teorema de inducción transfinita

Sea A un conjunto bien ordenado y sea $\varphi(x)$ una función proposicional cuyo argumento recorre el conjunto A y que satisface para todo x la condición:

(2) $$\text{si} \quad \bigwedge_y [(y \precneqq x) \Rightarrow \varphi(y)], \quad \text{entonces} \quad \varphi(x).$$

En tal caso, todo elemento del conjunto A satisface a la función proposicional $\varphi(x)$ es decir, $\bigwedge_x \varphi(x)$.

Supongamos que no sea así, es decir, que el conjunto Z de elementos del conjunto A que no satisfacen la función proposicional $\varphi(x)$ sea no vacío. Sea x_0 el primer elemento del conjunto Z. Por tanto

$$\bigwedge_y [(y \precneqq x_0) \Rightarrow \varphi(y)].$$

Pero de esto se sigue, en virtud de (2), que la proposición $\varphi(x_0)$ es verdadera. Pero entonces $x_0 \notin Z$.

Nota. El principio de inducción finita conocido desde la Aritmética es un caso particular del teorema precedente: precisamente, el caso en que A es el conjunto de los números naturales.

8.3. Teoremas de comparación de los números ordinales

Sean α y β números ordinales; sea α el tipo de orden del conjunto A y sea β el del conjunto B. Escribiremos $\alpha < \beta$ si el conjunto A es semejante a algún intervalo inicial del conjunto B, distinto de B.

La definición anterior de la relación « menor que » es la que debe aplicarse para cuanto se dice en los siguientes teoremas.

Teorema 1. *Un conjunto bien ordenado no es semejante a ninguno de sus intervalos iniciales distintos del conjunto mismo, es decir,*

(3) $$\alpha \not< \alpha.$$

Supongamos lo contrario. Es decir, supongamos que una función f establece la semejanza de los conjuntos A y $P(a)$ para algún $a \in A$. Puesto que $f(a) \in P(a)$ tenemos $f(a) \precneqq a$. Por tanto, el conjunto:

$$Z = \mathbf{E}_x[f(x) \precneqq x]$$

no es vacío. Sea x_0 el primer elemento en este conjunto. De aquí

(4) $$f(x_0) \precneqq x_0,$$

de donde, teniendo en cuenta que la función f establece la semejanza de los conjuntos A y $P(a)$, deducimos que

(5) $$f[f(x_0)] \precneqq f(x_0);$$

pero entonces, comparando la fórmula (5) con (4), vemos que x_0 no es el primer elemento del conjunto Z.

Teorema 2. *Dos intervalos iniciales de un conjunto bien ordenado no son semejantes.*

Esto sigue directamente del teorema anterior, pues de dos intervalos iniciales distintos $P(a)$ y $P(b)$ uno es un intervalo del otro (cuál de los dos sea depende de que sea $a \precneqq b$ o bien $b \precneqq a$).

El Teorema 2 puede también expresarse de la siguiente forma:

(6) *si* $\alpha < \beta$, $\beta \nless \alpha$.

Puesto que un intervalo inicial de un intervalo inicial de un conjunto A es también intervalo inicial de este conjunto, tendremos:

(7) *Si* $\alpha < \beta$ *y* $\beta < \gamma$, *es* $\alpha < \gamma$.

Demostraremos ahora el siguiente teorema fundamental:

Teorema 3. *Si $\alpha \neq \beta$, entonces, o $\alpha < \beta$ o $\beta < \alpha$. En otras palabras, si A y B son conjuntos bien ordenados, entonces, o el conjunto A es semejante a un intervalo inicial del conjunto B o el conjunto B es semejante a un intervalo inicial del conjunto A.*

Demostración. Designaremos por $P_A(x)$ los intervalos iniciales del conjunto A y por $P_B(y)$ los intervalos iniciales del conjunto B. Escribiremos $M \simeq N$ si los conjuntos M y N son semejantes.

Pongamos

(8) $$X = \mathbf{E}_x \bigvee_y [P_A(x) \simeq P_B(y)].$$

Por el Teorema 2, para cada $x \in X$, existe un solo elemento y tal que $P_A(x) \simeq P_B(y)$. Por tanto, podemos indicar este y por $f(x)$. Se tiene, pues, la equivalencia

(9) $$[y = f(x)] \equiv [(P_A(x) \simeq P_B(y)].$$

para todo $x \in X$.

Demostraremos que el conjunto X es un intervalo inicial del conjunto A. Sea $x' \precsim x \in X$. Debemos probar que $x' \in X$. Puesto que $x \in X$, existe (en virtud de (8)) una función que es aplicación semejante del intervalo $P_A(x)$ sobre el intervalo $P_B[f(x)]$; pero, puesto que $P_A(x')$ es un intervalo inicial del conjunto $P_A(x)$, con esta aplicación el intervalo $P_A(x')$ va sobre un intervalo inicial de $P_B[f(x)]$ y, por consiguiente, sobre un intervalo inicial del conjunto B. Esto significa que $x' \in X$, es decir, que X es un intervalo inicial del conjunto A.

Análogamente, el conjunto $f(x)$ es un intervalo inicial del conjunto B. Pues, en virtud de (9) y la fórmula (12) del Capítulo 4.4, tendremos,

$$(10) \qquad f(X) = \mathbf{E}_y \bigvee_x [y = f(x)] = \mathbf{E}_y \bigvee_x [P_B(y) \simeq P_A(x)].$$

Además, como ya hemos demostrado, de la condición $x' \precsim x$ resulta que el intervalo $P_B[f(x')]$ es un intervalo inicial del intervalo $P_B[f(x)]$, y de aquí $f(x') \precsim f(x)$. Esto significa que

$$(11) \qquad X \simeq f(X).$$

Falta por demostrar que, o $X = A$, o $f(X) = B$. Supongamos lo contrario, que $X \neq A$ y que $f(X) \neq B$. Puesto que los conjuntos X y $f(X)$ son intervalos iniciales de los conjuntos A y B, existen elementos $a \in A$ y $b \in B$ tales que

$$X = P_A(a) \qquad \text{y} \qquad f(X) = P_B(b).$$

En virtud de (11) tenemos por tanto $P_A(a) \simeq P_B(b)$, de donde se sigue, en virtud de (8), que $a \in X$, es decir que $a \in P_A(a)$; por tanto $a \precsim a$ Hemos llegado así a una contradicción.

El Teorema 3 implica el siguiente corolario:

Teorema 4. *Si A y B son conjuntos ordenados, sus potencias satisfacen a la condición de tricotomía, es decir:*

$$\text{o} \quad \overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}, \quad \text{o} \quad \overline{\overline{A}} < \overline{\overline{B}}, \quad \text{o} \quad \overline{\overline{B}} < \overline{\overline{A}}.$$

Una pregunta de significado fundamental se presenta ahora naturalmente: ¿Puede todo conjunto ser bien ordenado?

Consideraremos esta cuestión en el apartado 7.

8.4. Conjuntos de números ordinales

Usaremos la siguiente notación:

$$(12) \qquad \Gamma(a) = \mathbf{E}_\xi \, (\xi < a).$$

Teorema 1. *El conjunto $\Gamma(a)$ es bien ordenado (con respecto a la relación «menor que») y el tipo de orden de esta ordenación es a.*

En efecto, sea A un conjunto bien ordenado de tipo α y sea $\tau(x)$ para $x \in A$ el tipo de orden del intervalo $P(x)$.

La función τ establece la semejanza de A y $\Gamma(\alpha)$. Pues si $x' \prec x$, el conjunto $P(x')$ es distinto de $P(x)$ y es un intervalo inicial de $P(x)$, y por tanto (Teorema 1, apartado 3), $\tau(x') < \tau(x)$. Al mismo tiempo todo elemento ξ del conjunto $\Gamma(\alpha)$ es un valor de la función τ. Pues sea $\xi \in \Gamma(\alpha)$, es decir $\xi < \alpha$; en virtud de la definición de la relación « menor que » para los números ordinales, un conjunto de tipo ξ es semejante a algún intervalo inicial $P(x')$ del conjunto A; y por tanto $\xi = \tau(x')$.

Teorema 2. *Todo conjunto de números ordinales es bien ordenado (con la relación « menor que »).*

Basta probar que cualquier conjunto no vacío Φ de números ordinales contiene un número mínimo. Sea $\alpha \in \Phi$. Si α no es el número mínimo del conjunto Φ, entonces, el conjunto $\Phi \cap \Gamma(\alpha)$ no es vacío y por tanto, siendo un subconjunto del conjunto bien ordenado $\Gamma(\alpha)$, contiene un número mínimo β. El número β es el número mínimo del conjunto Φ. Pues si $\xi \in [\Phi - \Gamma(\alpha)]$ será $\xi > \alpha$ y por consiguiente $\xi > \beta$.

Teorema 3. *Para cualquier conjunto Φ de números ordinales existe un número ordinal mayor que todo número de ese conjunto.*

Concretamente, ese número es $\alpha + 1$, en donde α es el tipo de orden del conjunto

$$\Psi = \bigcup_{\xi} \Gamma(\xi) \quad \text{en donde} \quad \xi \in \Phi,$$

y $\alpha + 1$ indica el tipo del conjunto $\Psi \cup \{\alpha\}$ (cfr. apartado 6).

En efecto, para cada ξ el conjunto $\Gamma(\xi)$ es un intervalo inicial del conjunto Ψ. Si $\Gamma(\xi) = \Psi$, entonces $\xi = \alpha$ (por el Teorema 1); y en caso contrario $\xi < \alpha$. Por tanto, para todo ξ tendremos $\xi < \alpha + 1$.

Consecuencia de esto es:

Teorema 4. *No existe el conjunto de todos los números ordinales.*

8.5. El número Ω

DEFINICIÓN. Designamos por Ξ el conjunto de los tipos de orden de los conjuntos numerables bien ordenados y por Ω el tipo de orden del conjunto Ξ.

Por el Teorema 2 del apartado 4, Ω es un número ordinal.

Demostraremos que

$$\Xi = \Gamma(\Omega). \tag{13}$$

En virtud del Teorema 3 existe un número ordinal α mayor que cualquier número del conjunto Ξ. Por tanto, $\Xi \subset \Gamma(\alpha)$. Al propio tiempo Ξ

es un intervalo inicial del conjunto $\Gamma(\alpha)$. Efectivamente, sea $\xi' < \xi \in \Xi$; ξ' es, por tanto, tipo de orden de algún subconjunto de un conjunto numerable bien ordenado (de tipo ξ); este subconjunto es obviamente numerable y por tanto $\xi' \in \Xi$.

Puesto que Ξ es un intervalo inicial de $\Gamma(\alpha)$ existe un número $\gamma \leqslant \alpha$ tal que $\Xi = \Gamma(\gamma)$. Para demostrar la fórmula (13) falta sólo por ver que $\gamma = \Omega$. Pero esto se sigue inmediatamente de la definición del número Ω y del Teorema 1, apartado 4, en virtud del cual el conjunto $\Gamma(\gamma)$ tiene el tipo γ.

El conjunto $\Gamma(\Omega)$ es no numerable, es decir,

$$\overline{\overline{\Gamma(\Omega)}} > \mathfrak{a}. \tag{14}$$

En efecto, si el conjunto $\Gamma(\Omega)$ fuera numerable, su tipo de orden pertenecería a Ξ, es decir $\Omega \in \Xi$, de donde, por (13), tendríamos $\Omega \in \Gamma(\Omega)$, es decir, $\Omega < \Omega$, que es imposible.

Observaciones. El número cardinal $\overline{\overline{\Gamma(\Omega)}}$ se indica por el símbolo $\aleph_1$ (« alef » 1). Por consiguiente tenemos $\aleph_1 > \mathfrak{a}$, así como $\mathfrak{c} > \mathfrak{a}$ (Cap. 6.3 (21)). Sin embargo, como se ve, hemos llegado al número $\aleph_1$ por un razonamiento totalmente diverso del que utilizamos para llegar al número $\mathfrak{c}$. ¿Son ambos números iguales? Este es un problema que no ha sido resuelto aún. La hipótesis de que sea

$$\aleph_1 = \mathfrak{c} \tag{15}$$

se llama la *hipótesis del continuo*.

Notemos que $\aleph_1$ es el número inmediatamente siguiente al número $\mathfrak{a}$, es decir, si $\mathfrak{m} < \aleph_1$, también $\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{a}$.

En efecto, sea $\overline{\overline{A}} = \mathfrak{m}$. De acuerdo con nuestra hipótesis A es de potencia igual a la de algún subconjunto B del conjunto Ξ. Sea β el tipo de orden del conjunto B. Por tanto, los conjuntos B y $\Gamma(\beta)$ son semejantes y en consecuencia de igual potencia, es decir $\overline{\overline{\Gamma(\beta)}} = \mathfrak{m}$. Se sigue de esto que $\beta < \Omega$, pues en el caso contrario tendríamos $\Omega < \beta$ de donde $\Gamma(\Omega) \subset \Gamma(\beta)$, y por tanto $\aleph_1 = \overline{\overline{\Gamma(\Omega)}} < \overline{\overline{\Gamma(\beta)}} = \mathfrak{m}$ contra la hipótesis. De la desigualdad $\beta < \Omega$ se sigue, por la definición de Ω, que el conjunto B es numerable, es decir, $\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{a}$.

8.6. La aritmética de los números ordinales

Sean α y β dos números ordinales (o más generalmente, dos tipos de orden). Sean A y B dos conjuntos con tipos de orden α y β, respectivamente; supongamos también que $A \cap B = \emptyset$ (ver Cap. 6.1, sobre la posibilidad de hacer tal hipótesis). Estableceremos una ordenación del conjunto $A \cup B$ suponiendo que todo elemento del conjunto A precede a cualquier elemento

del conjunto B y que en el dominio de cada conjunto A y B individualmente no cambia la ordenación.

Denotaremos por $\alpha + \beta$ el tipo de orden del conjunto $A \cup B$, en las condiciones dichas. Esto define la adición de ordinales, en virtud del siguiente resultado:

Demostraremos que, en la hipótesis de que α y β son números ordinales, $\alpha + \beta$ es también un número ordinal.

Tenemos pues, que demostrar, que el conjunto $A \cup B$, con la ordenación de sus elementos establecida antes, es bien ordenado. Por consiguiente, sea $\emptyset \neq X \subset A \cup B$. Si $X \cap A \neq \emptyset$, entonces, puesto que A es un conjunto bien ordenado, el conjunto $X \cap A$ contiene un primer elemento; este elemento es el primero del conjunto total $X = (X \cap A) \cup (X \cap B)$, ya que precede, por la manera de ordenación del conjunto $A \cup B$, a cada uno de los elementos del conjunto $X \cap B$.

Finalmente, si $X \cap A = \emptyset$, entonces $X \subset B$ y por tanto existe un primer elemento en el conjunto X.

Ejemplos. $\alpha + 1 > \alpha$, de donde $\alpha + 1$ sigue inmediatamente a α. El número $\omega + \omega$ es el tipo del conjunto de los números de la forma $1 - 1/n$ junto con los números de la forma $2 - 1/n$, en donde $n = 1, 2, \ldots$.

Notemos que $1 + \omega = \omega$; y por tanto, *la adición no es conmutativa.*

Denotemos por $\alpha \cdot \beta$ el tipo de orden del producto cartesiano $A \times B$ ordenado como sigue:

$$[\langle x, y\rangle \precsim \langle u, v\rangle] \equiv [(y \precsim v) \vee ((y = v) \wedge (x \precsim u))].$$

Con la hipótesis de que α y β son números ordinales, $\alpha \cdot \beta$ es también un número ordinal.

En efecto, sea $\emptyset \neq Z \subset A \times B$. Sea Y la proyección del conjunto Z sobre el eje B. Así, tenemos que $\emptyset \neq Y \subset B$. Sea b el primer elemento del conjunto B y sea $X = \mathbf{E}_x[\langle x, b\rangle \in Z]$. Finalmente, sea a el primer elemento del conjunto X. Se comprueba fácilmente que $\langle a, b\rangle$ es el primer elemento del conjunto Z.

Ejemplos. $2 \cdot \omega$ es el tipo de orden del producto cartesiano $\{1, 2\} \times J$ (donde J es el conjunto de los números naturales) ordenado como sigue:

$$\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 2, 2\rangle, \ldots$$

y por tanto, $2 \cdot \omega = \omega$.

Por otra parte, $\omega \cdot 2 = \omega + \omega$ es el tipo de orden del producto $J \times \{1, 2\}$ (ver el ejemplo dado antes). Como vemos, *la multiplicación no es conmutativa.*

$\omega \cdot \omega$ es el tipo de orden del conjunto de todos los números de la forma $k - 1/n$, en donde $k = 1, 2, \ldots$ y $n = 1, 2, \ldots$

Escribiremos ω^2 en vez de $\omega \cdot \omega$. En general $\alpha^{n+1} = \alpha^n \cdot \alpha$.

Denotaremos por a^{ω} (para $a > 1$) el menor de los números que son mayores que cualquiera de los números a^n, en donde $n = 1, 2, \ldots$

Más generalmente, la definición de potenciación, y de otras muchas operaciones, puede introducirse con la ayuda del concepto de límite. Precisamente, sea λ un *límite ordinal* (> 0), es decir, un número que no tiene un inmediato anterior; sea φ una función que asigna a cada número $\xi < \lambda$ un cierto número ordinal $\varphi(\xi)$.

Denotaremos por

$$\lim_{\xi<\lambda} \varphi(\xi)$$

el menor de los números que son mayores que todos los números $\varphi(\xi)$.

Entonces definimos la potencia a^{β} (para $a > 1$) mediante las fórmulas,

1. $$a^0 = 1,$$
2. $$a^{\xi+1} = a^{\xi} \cdot a,$$
3. $$a^{\lambda} = \lim_{\xi<\lambda} a^{\xi},$$

en donde λ es un límite ordinal (cfr. el Teorema sobre la definición por inducción transfinita, apartado 7).

La Aritmética de los números ordinales es actualmente una teoría bien establecida en la que no vamos a ir más adelante (ver, por ejemplo, W. Sierpinski: *Leçons sur les nombres transfinis*, Paris, 1950, Cap. X, o bien, F. Hausdorff: *Set theory*, Cap. III). El motivo de la precedente exposición de esta teoría es, principalmente, facilitar al lector el conocimiento de los tipos de orden de los conjuntos numerables bien ordenados; todos estos tipos pueden ser obtenidos a partir de conjuntos de números reales (o, incluso, con conjuntos de números racionales).

8.7. Teorema sobre la posibilidad de ordenar bien un conjunto arbitrario

Deduciremos este teorema, que es de una importancia fundamental para la Teoría de conjuntos (cfr. Teorema 4, apartado 3), del axioma de elección. Con este fin, demostraremos primero el siguiente teorema, que es una generalización del citado axioma.

Principio general de elección. *Para cada conjunto A, existe una función, e, que asigna a cada subconjunto no vacío del conjunto A uno de sus elementos, es decir:*

(16) $$e(X) \in X \quad \text{para todo} \quad \emptyset \neq X \subset A.$$

Demostración. Sea $F(X) = \{X\} \times X$, es decir, el conjunto $F(X)$ está constituido por los pares ordenados de la forma $\langle X, x \rangle$, en donde $x \in X$.

Sea **R** el conjunto de valores de esta función, es decir, la familia constituida por todos los conjuntos $F(X)$, en donde $\emptyset \neq X \subset A$. Los elementos de esta familia son, pues, conjuntos disjuntos no vacíos. Por el axioma de elección (Cap. 3.7) existe un correspondiente conjunto de elementos, escogido cada uno de ellos en uno de los elementos pertenecientes a **R**; este conjunto es la función requerida e.

Teorema de Zermelo. *Para todo conjunto A existe una relación que establece su buena ordenación.*

Demostración. Consideremos los números ordinales β con las siguientes propiedades: existe una función f_β cuyo argumento recorre el conjunto $\Gamma(\beta + 1)$ y que satisface las igualdades

$$(17) \qquad f_\beta(0) = e(A), \qquad f_\beta(\xi) = e[A - f_\beta(\Gamma(\xi))] \qquad \text{para} \qquad \xi \leq \beta;$$

en particular

$$f_2(1) = e[A - \{e(A)\}],$$
$$f_2(2) = e(A - \{e(A),\ e[A - \{e(A)\}]\}).$$

La función f_β es uno-uno. Pues si $\xi' < \xi \leq \beta$, entonces $\xi' \in \Gamma(\xi)$ y, por tanto, $f_\beta(\xi') \in f_\beta(\Gamma(\xi))$, pero $f_\beta(\xi) \in [A - f_\beta(\Gamma(\xi))]$, por (16) y (17).

Se sigue de esto que el conjunto de valores de la función f_β, es decir, el conjunto $f_\beta(\Gamma(\beta + 1))$ es de tipo de orden $\beta + 1$.

Por tanto, como se ve, los números β forman un subconjunto Φ del conjunto de todos los tipos de orden de los subconjuntos del conjunto A, que puede ser bien ordenado. En virtud del Teorema 3, apartado 4, existen números ordinales que no pertenecen al conjunto Φ. Sea α el menor de ellos. Por tanto, no existe una función f_α que satisfaga las condiciones (17) (donde sustituiremos β por α) y, por otra parte, para cada $\beta < \alpha$ existe una función f_β que satisface esas condiciones.

Demostraremos ahora que el conjunto A puede ser bien ordenado, y que su tipo de orden es α.

Con este fin, notemos primero que si $\beta' \leq \beta$ y la función $g_{\beta'}$ tiene el conjunto $\Gamma(\beta' + 1)$ para conjunto de sus argumentos y satisface análogas condiciones a las de (17), es decir,

$$(18) \qquad g_{\beta'}(0) = e(A), \qquad g_{\beta'}(\xi) = e[A - g_{\beta'}(\Gamma(\xi))] \qquad \text{para} \qquad \xi \leq \beta',$$

entonces, para cada $\xi \leq \beta'$ se satisface la igualdad

$$(19) \qquad g_{\beta'}(\xi) = f_\beta(\xi)$$

(esto significa que, en el caso en que $\beta' = \beta$ la función f_β está unívocamente determinada y que en el caso en que $\beta' < \beta$ la función f_β es una extensión de la función $f_{\beta'}$).

En efecto, designemos por $\varphi(\xi)$ la función proposicional (19) con $\Gamma(\beta'+1)$ como conjunto de sus argumentos.

Apliquemos a esta función el teorema de inducción transfinita (ver apartado 2, donde pondremos $\Gamma(\beta'+1)$ en vez de A). Por tanto, supongamos que dado $\xi < \beta'$ la condición $\gamma < \xi$ implica que $g_{\beta'}(\gamma) = f_\beta(\gamma)$, y por lo tanto que $g_{\beta'}(\Gamma(\xi)) = f_\beta(\Gamma(\xi))$, lo que a su vez, en virtud de (18) y (17), implica (19). En virtud del teorema de inducción transfinita, la igualdad (19) vale para todo $\xi < \beta'$.

Supongamos que la igualdad

$$(20) \qquad f(\beta) = f_\beta(\beta)$$

vale para todo $\beta < a$. Para demostrar que el conjunto A admite una buena ordenación de tipo a, basta obviamente demostrar que la función f es uno-uno y que el conjunto de sus valores coincide con A.

Por tanto, sea $\beta' < \beta$. Ya probamos (cfr. (19)) que $f_{\beta'}(\xi) = f_\beta(\xi)$ para todo $\xi < \beta'$, y por tanto, en particular, $f_{\beta'}(\beta') = f_\beta(\beta')$. Pero como la función f_β es uno-uno, tendremos $f_\beta(\beta') \neq f_\beta(\beta)$, es decir, $f(\beta') \neq f(\beta)$.

Falta demostrar que $f(\Gamma(a)) = A$. Supongamos que $A - f(\Gamma(a)) \neq \emptyset$ y definimos la función f_a como sigue:

$$f_a(\beta) = f(\beta) \quad \text{para} \quad \beta < a \quad \text{y} \quad f_a(a) = e[A - f_a(\Gamma(a))].$$

Como se ve fácilmente, la función f_a definida así satisface a la condición (17) si reemplazamos en ella β por a. Pero esto contradice la definición del número a.

Notas. El Teorema de Zemerlo puede deducirse del siguiente teorema (que podría ser expuesto de forma todavía más general).

Teorema de definición por inducción transfinita. *Para cada conjunto A, para cada número a y para cada función h que asigna a los subconjuntos X del conjunto A elementos del mismo conjunto, es decir*

$$(21) \qquad h(X) \in A \quad \text{para} \quad X \subset A,$$

existe una función f definida para cada $\xi < a$ y que satisface a la condición

$$(22) \qquad f(\xi) = h(f(\Gamma(\xi))).$$

Esquema de la demostración: Sean el conjunto A y la función h dados. Supongamos que el teorema sea falso y que a sea el menor elemento para el que no existe una función f satisfaciendo la condición (22). Por tanto, para cada $\beta < a$ existe una función f satisfaciendo la condición

$$(23) \qquad f_\beta(\xi) = h(f_\beta(\Gamma(\xi)) \quad \text{para} \quad \xi < \beta.$$

Puede probarse, de una manera análoga a la demostración anterior, que la función f_β está unívocamente determinada. La función f definida

mediante las fórmulas

$$f(\beta)=f_\beta(\beta) \quad \text{para} \quad \beta<\alpha \qquad \text{y} \qquad f(\alpha)=h(f(\Gamma(\alpha)))$$

satisface entonces las condiciones del teorema, contra nuestra hipótesis.

Por tanto, nuestro teorema queda demostrado.

Por lo que hace a deducir de este el teorema de Zermelo, sustituiremos

$$h(X)=e(A-X) \qquad \text{para} \qquad X\neq A,$$

y denotemos por $h(A)$ un elemento arbtirario del conjunto A. Sea Φ el conjunto de los números β para los que existe una función f_β satisfaciendo la condición (23) y la desigualdad $f_\beta(\Gamma(\beta))\neq A$. Sea α el menor número que no pertenece al conjunto Φ. Entonces $f(\Gamma(\alpha))=A$, de donde se sigue fácilmente que el conjunto A puede ser bien ordenado, siendo su tipo de orden α.

EJERCICIOS

1. Demostrar que las condiciones $\alpha<\Omega$ y $\beta<\Omega$ implican que $\alpha+\beta<\Omega$ y $\alpha\cdot\beta<\Omega$.

2. Todo número ordinal es de la forma $\lambda+n$, en donde λ es un límite ordinal y n es un número natural o cero.

Sugerencia: Utilizar el hecho de que en un conjunto bien ordenado no existe ninguna sucesión infinita de la forma $a_1 \succ a_2 \succ a_3 \succ \ldots$

3. Demostrar las siguientes implicaciones:

(a) $(\alpha<\beta)\Rightarrow(\gamma+\alpha<\gamma+\beta)$,

(b) $(\alpha\leqslant\beta)\Rightarrow(\alpha+\gamma\leqslant\beta+\gamma)$.

¿La condición $\beta>0$ implica la desigualdad $\gamma<\beta+\gamma$?

4. Demostrar la ley distributiva.

$$\alpha\cdot(\beta+\gamma)=\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma.$$

Demostrar con un contraejemplo que la fórmula $(\beta+\gamma)\cdot\alpha=\beta\cdot\alpha+\gamma\cdot\alpha$ no es cierta en general.

5. Demostrar, que si $\alpha\geqslant\beta$ existe un solo número ordinal γ tal que $\alpha=\beta+\gamma$ (al número γ le llamaremos la *diferencia*, $\alpha-\beta$, de los números α y β).

6. Demostrar que para cada dos números ordinales $\alpha\neq 0$ y β existe un par de números δ y $\varrho<\alpha$ tales que:

$$\beta=\alpha\cdot\delta+\varrho.$$

Ambos números δ *(cociente)* y ϱ *(resto)* están unívocamente determinados.

7. Una *sucesión transfinita de tipo* ζ es una función cuyo conjunto de argumentos es el conjunto $\Gamma(\zeta)$ y cuyos valores son números ordinales. Una sucesión transfinita φ se dice que es *continua* si para todo límite ordinal $\gamma<\zeta$ se tiene la siguiente igualdad:

$$\varphi(\gamma)=\lim_{\xi<\gamma}\varphi(\xi).$$

Demostrar que las sucesiones transfinitas $\varphi(\xi) = a + \xi$ y $\varphi(\xi) = a \cdot \xi$ (para $a > 0$) son crecientes y continuas.

8. Demostrar que toda sucesión transfinita creciente satisface a la desigualdad $\xi \leq \varphi(\xi)$ para todo ξ.

Sugerencia: Suponiendo que el teorema es falso, sea α el primer número tal que $\varphi(\alpha) < \alpha$.

9. Sea φ una sucesión transfinita creciente y continua. Formemos la sucesión.

$$a_0 = a, \qquad a_1 = \varphi(a_0), \qquad \ldots, \qquad a_n = \varphi(a_{n-1}), \qquad \ldots$$

Sea $\varkappa = \lim_{n<\omega} a_n$. Demostrar que $\varphi(\varkappa) = \varkappa$ (con la hipótesis de que los números considerados pertenezcan al dominio de argumentos de la función φ).

10. El número $\varkappa$ del ejercicio 9 se llama un *número crítico* de la sucesión φ. Hallar los números críticos de las sucesiones

$$\varphi(\xi) = a + \xi, \qquad \varphi(\xi) = a \cdot \xi, \qquad \varphi(\xi) = a^{\xi}.$$

11. Mediante el principio generalizado de elección (ver párrafo 7) demostrar que todo número cardinal infinito $\mathfrak{m}$ satisface la desigualdad: $\mathfrak{m} > \mathfrak{a}$.

II PARTE

Topología

Introducción a la parte II

La Topología es el estudio de aquellas propiedades de las configuraciones geométricas que permanecen invariables cuando estas configuraciones se someten a transformaciones bicontinuas y biunívocas u homeomorfismos (v. Cap. 12.3). Llamamos a esas propiedades invariantes topológicas. Por ejemplo, la propiedad que tiene el círculo de dividir al plano en dos regiones es invariante topológica: si transformamos el círculo en una elipse o en el perímetro de un triángulo, esta propiedad se mantiene. Por el contrario, la propiedad de una curva de poseer una tangente en cada punto no es una propiedad topológica: el círculo tiene esta propiedad pero el perímetro de un triángulo no la posee, a pesar de poderse obtener del círculo por medio de un homeomorfismo.

Como puede observarse con el ejemplo anterior, la Topología trabaja con conceptos más generales que el Análisis; las propiedades diferenciales de una transformación dada no son esenciales para la Topología, pero sí la bicontinuidad. Por consiguiente, con la Topología podemos estudiar problemas que el Análisis no puede resolver.

La generalidad de los métodos topológicos se basa no sólo en la generalidad de las hipótesis relativas a las transformaciones, sino también en la generalidad de los conjuntos a los que se aplican estas transformaciones. Estos pueden ser conjuntos arbitrarios de puntos sobre la recta o plano reales, o en un espacio n-dimensional, o conjuntos todavía más generales, siempre que podamos definir en ellos — hablamos en sentido amplio — el concepto de conjunto cerrado, es decir, que sean espacios topológicos. Esta generalidad no sólo tiene importancia metodológica; en la Matemática moderna hay una tendencia a proveer al conjunto de objetos considerados en una investigación (ya sean funciones, sucesiones o curvas) de una topología, con lo que efectuamos una geometrización, o mejor, una topologización de la investigación, que da lugar a numerosas aplicaciones. Así, por ejemplo, los teoremas de existencia de solución para ciertos tipos de ecuaciones diferenciales pueden expresarse como teorema de existencia de puntos invariantes de un espacio funcional (el espacio de las funciones continuas) en las transformaciones continuas; estos teoremas pueden demostrarse por métodos topológicos de una forma más general y simple que como se hacía antes, sin la ayuda de la Topología.

¿Hasta qué punto debe procurarse la generalidad de los espacios considerados en Topología para que sean útiles en las aplicaciones, y no se hagan demasiado artificiales? La respuesta a esta pregunta depende de los fines a los que se destina un trabajo topológico. Por la extensión limitada y carácter elemental de este libro, parece apropiado limitarnos a los espacios llamados métricos (cuya definición se da en el Capítulo 9.1). La generalidad de estos espacios basta para la mayoría de sus aplicaciones más importantes; en particular, son espacios métricos los subconjuntos del espacio euclídeo n-dimensional, los espacios de sucesiones (de Hilbert y Fréchet), y el espacio de las funciones continuas; por otra parte, el concepto de espacio métrico es esencialmente simple y geométricamente claro.

En los Capítulos 9 al 12 damos los conceptos fundamentales con los que hemos de tratar en todas las partes de la Topología. El lector conoce ya muchos de estos conceptos por el Análisis (tales como punto de acumulación, entorno, conjunto cerrado, etc.) por estar éste relacionado con el espacio de los números reales o de los complejos; esto está ligado especialmente con el Capítulo 12 que se ocupa de teoremas sobre funciones continuas. Aquí (y en los Capítulos 15 y 16) se demuestran, bajo hipótesis mucho más generales, teoremas conocidos del Análisis, por ejemplo, sobre continuidad uniforme, convergencia uniforme y propiedad de Darboux. Esto nos permite precisar el campo de validez de estos teoremas (cosa que tiene un gran valor didáctico).

En los Capítulos posteriores (13-18) nos dedicaremos a espacios más específicos, dando las principales propiedades de los espacios separables (que comprenden a la mayoría de los espacios que aparecen en las aplicaciones), espacios completos (con el Teorema de Baire y sus consecuencias), espacios compactos (que constituyen la generalización de los subconjuntos acotados cerrados de un espacio euclídeo), espacios conexos (conexión es la palabra que nos dará el concepto preciso de continuidad en un conjunto) y espacios localmente conexos (las curvas, superficies y variedades multidimensionales, que se consideran en Geometría diferencial son, por lo general, continuos localmente conexos).

El Capítulo 19 contiene resultados de la teoría dimensional. El concepto de dimensión — aunque data de antiguo (aparece ya en los Elementos, de Euclides) — no fue correctamente definido hasta época reciente y esto gracias al uso de métodos topológicos. Las limitaciones impuestas en el presente volumen nos han forzado a abstenernos de desarrollar algunas demostraciones.

En el Capítulo 20 nos ocuparemos más detalladamente de las propiedades del simplex n-dimensional, que es el concepto fundamental de la geometría clásica multidimensional. De particular interés es la demostra-

ción del famoso teorema del punto fijo, debido a L. E. J. Brouwer, que tiene tantas aplicaciones en la teoría de las ecuaciones diferenciales.

El Capítulo 21 contiene, en un esquema muy general, una introducción a la teoría de la homología, que es una parte fundamental de la Topología algebraica (para más detalles, véase la bibliografía). Esta teoría tiene variadas aplicaciones en Geometría diferencial y algebraica, en el Cálculo de variaciones, y en otras ramas del Análisis. Este capítulo depende del Capítulo 20 (sobre el concepto de simplex) y, en contraste con los otros capítulos del libro, hace uso aquí de conceptos algebraicos, especialmente de la teoría de grupos. Este es el origen del nombre de topología algebraica, en contraste a la topología conjuntista, en donde hacemos uso de los conceptos y teoremas de la teoría de conjuntos. Es digna de mención la relación que observamos aquí entre las ramas individuales de la Matemática: la Topología, que es un poderoso instrumento para el Análisis funcional y para varias ramas del Análisis clásico, que a su vez está conectado, por sus aplicaciones, con la tecnología y las ciencias naturales, hace uso de los métodos del Álgebra y de la Teoría de conjuntos.

Finalmente, en el último capítulo, conceptualmente muy relacionado con la Geometría, tratamos de los teoremas sobre la división del plano. Se da una detallada demostración del teorema de Jordan, que es un resultado clásico de Análisis.

En sus primeras fases, la topología conjuntista y la topología algebraica se desarrollaron enteramente independientes y poseían una temática completamente diferentes. La topología conjuntista, anteriormente llamada teoría de conjuntos de puntos, y concerniente a subconjuntos arbitrarios del espacio euclídeo, fue comenzada por G. Cantor, el creador de la Teoría de conjuntos (alrededor de 1880). La topología algebraica fue creada por H. Poincaré en los últimos años del siglo pasado; sus objetos eran polígonos y poliedros n-dimensionales. La unión de estas dos teorías vino más tarde, hacia 1925; esto fue debido en gran parte al trabajo de P. S. Aleksandrov. Este período fue precedido por el paso, en topología conjuntista, de la investigación de subconjuntos del espacio euclídeo a la investigación de espacios topológicos arbitrarios. Esta ampliación de la temática de la Topología apareció fuertemente relacionada con las nuevas investigaciones matemáticas que trataban del concepto de espacio funcional y los espacios de infinitas dimensiones introducidos por Hilbert.

En los últimos treinta años se está realizando un rico florecimiento de la Topología; muchos problemas fundamentales se han resuelto, y se han desarrollado nuevos métodos. La Topología, que hasta este tiempo era un conglomerado de temas vagamente relacionados, ha llegado a ser una ciencia sistemática, y los métodos topológicos han penetrado en gran parte de los dominios de toda la Matemática.

CAPÍTULO **9**

Espacios métricos

9.1. Espacios métricos

DEFINICIÓN. Se dice que un conjunto X es un *espacio métrico* cuando a cada par de sus elementos, esto es, a cada par de *puntos* x, y pertenecientes al conjunto X, se asigna un número real $|x-y| \geqslant 0$, llamado *distancia del punto x al punto y*, que satisface las tres condiciones siguientes:

(1) $$|x-y| = 0 \text{ siempre y cuando } x = y,$$

(2) $$|x-y| = |y-x|,$$

(3) $$|x-y| + |y-z| \geqslant |x-z|;$$

la última condición expresa la llamada *desigualdad triangular.*

De esta definición se sigue inmediatamente que todo subconjunto de un espacio métrico es asimismo un espacio métrico (conservando la misma definición de distancia).

EJEMPLOS. 1. Todo conjunto de números complejos o reales forma un espacio métrico, si entendemos por distancia entre dos números x e y el valor absoluto de su diferencia. Esto justifica el símbolo que hemos empleado para expresar la distancia.

2. Un espacio euclídeo de n-dimensiones $\mathcal{E}^n$, cuyos puntos son sucesiones de n números reales $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, es un espacio métrico con la definición usual de distancia del punto $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ al $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ dada por la fórmula pitagórica

(4) $$|x-y| = \left\{ \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2 \right\}^{1/2}.$$

Esta misma fórmula «metriza» el producto cartesiano

$$X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$$

de n espacios métricos cualesquiera, $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

3. *Espacio de Hilbert.* Este espacio es el conjunto de todas las sucesiones de números reales $x = (x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots)$ tales que $\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2$ es convergente. Aquí se entiende por distancia entre dos puntos, esto es, distancia entre dos sucesiones tales, el valor

$$(5) \qquad |x - y| = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |x_i - y_i|^2 \right\}^{1/2}.$$

4. El conjunto de las funciones continuas de variable real definidas en el intervalo cerrado $0 \leqslant x \leqslant 1$ forma un espacio métrico, si la distancia entre dos funciones f y g está definida por la fórmula

$$(6) \qquad |f - g| = \sup |f(x) - g(x)|, \quad \text{en donde} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

5. Un conjunto arbitrario puede considerarse como un espacio métrico si suponemos que la distancia entre cada par de puntos distintos es 1.

9.2. Diámetro de un conjunto. Espacios acotados

Se llama *diámetro* del espacio X, con notación $\delta(X)$, al extremo superior de las distancias $|x - y|$ entre todos los pares de puntos x e y en el espacio métrico X. Si X es un círculo o una esfera, su diámetro $\delta(X)$ es el diámetro en el sentido usual.

Los espacios métricos con diámetro finito se llaman *acotados.*

Por ejemplo, el intervalo cerrado $0 \leqslant x \leqslant 1$ está acotado. Lo mismo es válido para un cuadrado y el cubo n-dimensional. Por otra parte, la semirrecta $x \geqslant 0$, la recta real y el espacio $\mathcal{E}^n$ son ejemplos de espacios no acotados.

9.3. El cubo de Hilbert

Con la hipótesis de que los espacios $X_1, X_2, \ldots, X_m, \ldots$ estén uniformemente acotados (es decir, que el extremo superior de sus diámetros sea finito; v. también Cap. 12.4, nota), definimos la distancia entre dos puntos $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots)$ e $y = (y_1, y_2, \ldots, y_m, \ldots)$ del producto cartesiano infinito $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_m \times \ldots$ mediante la fórmula

$$(7) \qquad |x - y| = \sum_{m=1}^{\infty} (1/2^m)|x_m - y_m|.$$

Dejamos al lector la comprobación de que la distancia así definida satisface las condiciones (1)-(3), es decir, que el espacio $X_1 \times X_2 \times \ldots$ es métrico.

Designaremos por $\mathcal{I}$ al intervalo cerrado $0 \leq x \leq 1$. El espacio $\mathcal{H} = \mathcal{I} \times \mathcal{I} \times \ldots$ se denomina *cubo de Hilbert;* es el espacio en que todas las « coordenadas » de sus puntos $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots)$ están contenidos en el intervalo cerrado $[0, 1]$. El espacio $\mathcal{H}$, o potencia infinita del intervalo cerrado $[0, 1]$, constituye claramente la generalización natural del cubo n-dimensional.

EJERCICIOS

1. Sea $\mathcal{E}^2$ el plano complejo; para los puntos $z, z' \in \mathcal{E}^2$ (en donde $z \neq z'$), $\|z - z'\|$ se define del modo siguiente: en caso de que la recta zz' pase por el origen del sistema de coordenadas, tómese $\|z - z'\| = |z - z'|$ y en caso contrario tómese $\|z - z'\| = |z| + |z'|$, en donde $|z|$ significa como de costumbre el valor absoluto de z.

Demostrar que la función $\|z - z'\|$ puede considerarse como la distancia de z a z', es decir, que satisface las condiciones de espacio métrico.

2. Mostrar que si los conjuntos A y B no son vacíos y $A \subset B$, entonces $\delta(A) \leq \delta(B)$.

3. Probar la desigualdad

$$\delta(A \cup B) \leq \delta(A) + \delta(B)$$

suponiendo que $A \cap B \neq \emptyset$.

4. Sea X un espacio métrico y $a \in X$. Asignemos a cada punto $p \in X$ la función f_p definida del modo siguiente:

$$f_p(x) = |x - p| - |x - a|.$$

Probar que $|f_p - f_q| = |p - q|$, estando la distancia entre dos funciones definida por medio de la fórmula (6).

5. Sean X e Y dos espacios métricos. Sea Φ el conjunto de todas las funciones acotadas que aplican el espacio X en subespacios de Y (decimos que la función f es *acotada* si el diámetro $\delta[f(X)]$ es finito). Probar que si definimos la distancia $|f - g|$ para $f, g \in \Phi$ por medio de la fórmula (6), el conjunto Φ resulta un espacio métrico (es decir, se satisfacen las condiciones (1)-(3)).

CAPÍTULO **10**

Límite de una sucesión de puntos. Clausura de un conjunto

Definiremos el concepto de límite de una sucesión de puntos, fundamental en Topología, haciendo uso del concepto de límite de una sucesión de números reales, conocido por el Análisis matemático elemental.

10.1. Convergencia de una sucesión de puntos

DEFINICIÓN. Una sucesión de puntos $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ de un espacio métrico *converge* hacia un punto p de dicho espacio si la sucesión de números reales $|p_n - p|$ es convergente hacia cero. Entonces llamamos al punto p *límite* de la sucesión $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ y escribimos $p = \lim_{n\to\infty} p_n$.

Utilizando el simbolismo de la lógica esta definición se escribe del modo siguiente:

(1) $$(\lim_{n\to\infty} p_n = p) \equiv (\lim_{n\to\infty} |p_n - p| = 0)$$

(2) $$\equiv \bigwedge_\varepsilon \bigvee_k \bigwedge_n [(n > k) \Rightarrow (|p_n - p| < \varepsilon)].$$

La definición de convergencia de una sucesión de puntos en un espacio métrico puede darse de otra forma, muy conveniente para posteriores consideraciones, introduciendo el concepto de esfera.

Un *entorno esférico (abierto)* de p con radio $\varepsilon > 0$, o brevemente: $K(p, \varepsilon)$, es el conjunto de los puntos x cuya distancia al punto p es menor que ε:

(3) $$K(p, \varepsilon) = \mathbf{E}_x(|x - p| < \varepsilon).$$

En el espacio de los números reales un entorno esférico abierto es un intervalo abierto y en el plano es un círculo sin la circunferencia. Por tanto, nuestra terminología es la que corresponde al espacio euclídeo de tres dimensiones.

10.2. Propiedades del límite

Teorema 1. *La condición necesaria y suficiente para que* $\lim_{n\to\infty} p_n = p$, *es que todo entorno esférico K de p contenga todos los puntos de la sucesión* $p_1, p_2, \ldots,$ *con excepción, tal vez, de un número finito* (es decir, existe un k tal que $p_n \in K$ para todo $n > k$).

Para demostrarlo substituimos $p_n \in K(p, \varepsilon)$ en la fórmula (2) en lugar de $|p_n - p| < \varepsilon$ (lo que puede hacerse en virtud de (3)).

Teorema 2. *Toda sucesión convergente está acotada;* dicho de otra forma: *el conjunto de los términos de una sucesión convergente es acotado.*

Sea $p = \lim_{n\to\infty} p_n$, y sea Z el conjunto de los términos de la sucesión $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ En virtud de nuestra suposición, existe un k tal que para $n > k$ tenemos $|p_n - p| < 1$. Sea ϱ el mayor de los $k + 1$ números

$$|p_1 - p|, |p_2 - p|, \ldots, |p_n - p|, 1.$$

Por tanto tenemos $|p_n - p| < \varrho$ para todo n. En consecuencia

$$|p_n - p_m| < |p_n - p| + |p - p_m| < 2\varrho, \quad \text{es decir} \quad \delta(Z) < 2\varrho.$$

Las demostraciones de los siguientes teoremas no difieren de las que se dan en Análisis elemental para las sucesiones de números reales.

Teorema 3. *Si* $p_n = p$ *para* $n = 1, 2, \ldots,$ *entonces* $\lim_{n\to\infty} p_n = p$.

Teorema 4 (sobre sucesiones parciales). *Si* $\lim_{n\to\infty} p_n = p$ *y* $k_1 < k_2 < \ldots,$ *entonces*

$$\lim_{n\to\infty} p_{k_n} = p.$$

Teorema 5. *Toda sucesión* $p_1, p_2, \ldots$ *que no converge hacia p contiene una sucesión parcial, ninguna de cuyas sucesiones parciales es convergente hacia p.*

Teorema 6. *Ni la convergencia ni el límite de una sucesión depende de cualquier número finito de términos iniciales de la sucesión.*

Esto significa que la adición o substracción de un número finito de términos a una sucesión convergente no afecta ni a su convergencia ni al valor de su límite.

Teorema 7. *Si* $\lim_{n\to\infty} p_n = p = \lim_{n\to\infty} q_n$, *entonces la sucesión* p_1, q_1, p_2, $q_2 \ldots$, *converge hacia* p.

10.3. Límite en el producto cartesiano

Sea $Z = X \times Y$ el producto cartesiano de los espacios métricos X e Y.

Teorema 1. *Condición necesaria y suficiente para que la sucesión de puntos* $z_n = \langle x_n, y_n \rangle$ *del espacio* $X \times Y$ *sea convergente hacia el punto* $z = \langle x, y \rangle$, *es que* $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ *y* $\lim_{n\to\infty} y_n = y$.

Demostración. Sea $\lim_{n\to\infty} z_n = z$ y $\varepsilon > 0$. Por tanto existe un k tal que $|z_n - z| < \varepsilon$ para $n > k$. Pero como

$$|z_n - z| = \{|x_n - x|^2 + |y_n - y|^2\}^{1/2} \geqslant |x_n - x|$$

(cfr. Cap. 9.1 (4)), tenemos también que $|x_n - x| < \varepsilon$ para $n > k$, es decir $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

De manera análoga podemos probar que $\lim_{n\to\infty} y_n = y$.

Recíprocamente, supongamos ahora que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ y $\lim_{n\to\infty} y_n = y$. Sea $\varepsilon > 0$. Entonces existe un k tal que para $n > k$ tenemos

$$|x_n - x| < \varepsilon \quad \text{y} \quad |y_n - y| < \varepsilon,$$

de donde

$$|z_n - z| = \{|x_n - x|^2 + |y_n - y|^2\}^{1/2} < \varepsilon\sqrt{2}.$$

Por consiguiente $\lim_{n\to\infty} z_n = z$.

Teorema 2. *Sean* $X_1, X_2, \ldots, X_m, \ldots$ *espacios uniformemente acotados, para* $m = 1,2,\ldots$ *(v. también Cap. 12.4, nota). y sea* $\varrho > \delta(X_m)$. *Sean* $x^n = (x_1^n, x_2^n, \ldots, x_m^n, \ldots)$ *para* $n = 1,2\ldots$ *sendos puntos del espacio* $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_m \times \ldots$ *dotado de métrica por la fórmula (7) del Capítulo 9.3. La condición necesaria y suficiente para que esa sucesión converja hacia* $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ *es que* $\lim_{n\to\infty} x_m^n = x_m$ *para* $m = 1, 2, \ldots$, *es decir,*

$$(\lim_{n\to\infty} x^n = x) \equiv \bigwedge_m (\lim_{n\to\infty} x_m^n = x_m).$$

Demostración. Sea $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, y sea $\varepsilon > 0$. Por consiguiente, para un m fijo existe un k tal que

$$|x^n - x| < \varepsilon/2^m$$

para $n > k$.

Como, en todo caso,

$$(1/2^m)|x_m^n - x_m| < |x^n - x|$$

por (7) (Cap. 9.3), tenemos

$$|x_m^n - x_m| \leq 2^m|x^n - x| < 2^m \cdot \varepsilon/2^m = \varepsilon$$

para $n > k$.

Esto significa que

(4) $$\lim_{n\to\infty} x_m^n = x_m.$$

Supongamos a continuación que la igualdad (4) se verifica para $m = 1, 2, \ldots$

Sea $\varepsilon > 0$. Sea i un número natural tal que

(5) $$1/2^i < \varepsilon.$$

Aplicando la igualdad (4) para $m = 1, 2, \ldots, i$, existe un k tal que para $n > k$ las desigualdades

(6) $$|x_1^n - x_1| < \varepsilon, |x_2^n - x_2| < \varepsilon, \ldots, |x_i^n - x_i| < \varepsilon$$

se verifican. Por tanto, en virtud de (5) y (6),

$$|x^n - x| = \sum_{m=1}^{\infty} (1/2^m)|x_m^n - x_m| = \sum_{m=1}^{i} (1/2^m)|x_m^n - x_m| +$$

$$+ \sum_{m=i+1}^{\infty} (1/2^m)|x_m^n - x_m| < \sum_{m=1}^{i} (\varepsilon/2^m) + \sum_{m=i+1}^{\infty} \delta(X_m)/2^m < \varepsilon + \varepsilon \cdot \varrho$$

para todo $n > k$, es decir, $|x^n - x| < \varepsilon(1 + \varrho)$. De esto se sigue que $\lim_{n\to\infty} x^n = x$.

10.4. Clausura de un conjunto

Sea A un subconjunto de un espacio métrico. Designamos por $\overline{A}$ un subconjunto de este espacio, llamado *clausura* (o *cierre*, o *adherencia*, según los autores) del conjunto A, definido del modo siguiente: un punto p pertenece al conjunto A siempre y cuando exista una sucesión de puntos

$$p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$$

en el conjunto A tal que $\lim_{n\to\infty} p_n = p$.

Teorema. *$p \in \overline{A}$ siempre y cuando*

(7) $$K \cap A \neq \emptyset$$

para todo entorno esférico abierto K de p.

Pues, si $\lim_{n\to\infty} p_n = p$, con $p_n \in A$, entonces $K \cap A \neq \emptyset$, en virtud del Teorema 1, apartado 2.

Los puntos de $\bar{A}$ se llaman, frecuentemente, *puntos adherentes* a A.

Supongamos ahora que la condición (7) se satisface para todo K. Sea $K_n = K(p, 1/n)$. Por hipótesis, $K_n \cap A \neq \emptyset$, es decir, para todo n existe un punto $p_n \in K_n \cap A$. Por la definición de K tenemos que $|p_n - p| < 1/n$, y por consiguiente $p = \lim_{n\to\infty} p$. Y puesto que $p_n \in A$, tenemos que $p \in \bar{A}$.

Nota. El teorema anterior puede enunciarse como sigue: *la condición necesaria y suficiente para que el punto p no pertenezca al conjunto $\bar{A}$ es que exista un entorno esférico de p disjunto con A.*

10.5. Cuatro propiedades fundamentales de la clausura

Demostraremos cuatro propiedades fundamentales de la operación $\bar{A}$:

(I) $$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B},$$

(II) $$A \subset \bar{A},$$

(III) $$\bar{\emptyset} = \emptyset,$$

(IV) $$\overline{(\bar{A})} = \bar{A}.$$

Demostración de la propiedad (I). Sea $p \in \overline{A \cup B}$. Esto significa que $p = \lim_{n\to\infty} p_n$, con $p_n \in A \cup B$; de lo que se sigue que existe una sucesión de índices $k_1 < k_2 < \ldots$ tal que para todo n tenemos $p_{k_n} \in A$ o bien, para todo n, $p_{k_n} \in B$. Como $p = \lim_{n\to\infty} p_{k_n}$ (en virtud del Teorema 4, apartado 2), en el primer caso obtenemos que $p \in \bar{A}$, y en el segundo $p \in \bar{B}$. Por tanto, en cualquier caso $p \in \bar{A} \cup \bar{B}$.

Por tanto, hemos probado que

(8) $$\overline{A \cup B} \subset \bar{A} \cup \bar{B}.$$

Para probar la inclusión inversa, mostraremos que

(I') $$(A \subset B) \Rightarrow (\bar{A} \subset \bar{B}),$$

es decir, que la condición

(9) $$A \subset B$$

implica la condición

(10) $$\bar{A} \subset \bar{B}.$$

En efecto, si $p \in \bar{A}$, entonces $p = \lim_{n\to\infty} p_n$, con $p_n \in A$. En virtud de (9) deducimos de esto que $p_n \in B$, y por tanto que $p \in \bar{B}$.

Como $A \subset A \cup B$ y $B \subset A \cup B$, deducimos de (I') que

$$\bar{A} \subset \overline{A \cup B} \quad \text{y} \quad \bar{B} \subset \overline{A \cup B},$$

y de aquí, sumando miembro a miembro, obtenemos

(11) $$\bar{A} \cup \bar{B} \subset \overline{A \cup B}.$$

De las proposiciones (8) y (11) se deduce la igualdad (I).

Para demostrar la proposición (II) es suficiente hacer notar que si p pertenece a A, es $p = \lim_{n\to\infty} p_n$, con $p_n = p$ para $n = 1, 2, \ldots$ (véase Teorema 3, apartado 2).

De la inclusión (II) resulta inmediatamente la igualdad (III).

Nos queda por probar la fórmula (IV). En virtud de la inclusión (II) tenemos que $\bar{A} \subset \overline{(\bar{A})}$. Por lo tanto, es suficiente probar que $\overline{(\bar{A})} \subset \bar{A}$.

Supongamos que $p \in \overline{(\bar{A})}$. En virtud del teorema del apartado 4, para todo entorno esférico K de p tenemos $K \cap \bar{A} \neq \emptyset$. Por tanto, consideremos un $q \in K \cap \bar{A}$ y elijamos un entorno esférico L de q tal que $L \subset K$ (para lo cual es suficiente que el radio del entorno esférico L sea menor que la diferencia entre dos números: el radio de K y la distancia de p a q). Como $q \in \bar{A}$, L es una esfera con centro en q, por lo que, en virtud del teorema del apartado 4, tenemos que $L \cap A \neq \emptyset$. Pero como $L \subset K$, tenemos que $(L \cap A) \subset (K \cap A)$, de donde $K \cap A \neq \emptyset$. De esto deducimos que $p \in \bar{A}$ (en virtud del mismo teorema del apartado 4).

Nota. Las propiedades (I)-(IV) de la clausura (de un conjunto en un espacio métrico), definida anteriormente, pueden tomarse como los axiomas de un espacio topológico si entendemos por *espacio topológico* un conjunto en el que se ha definido la operación de clausura y que asigna a cada subconjunto A de este espacio otro subconjunto $\bar{A}$ de este mismo espacio de forma que se satisfagan las condiciones (I)-(IV). Todo espacio métrico en el que se ha definido la clausura en la forma indicada en el apartado 4 es, por lo tanto, un espacio topológico.

Más adelante consideraremos diversos tipos de espacios métricos. No obstante, demostraremos muchos teoremas para ellos haciendo uso únicamente de las fórmulas (I)-(IV). Por tanto, estos teoremas serán válidos para todo espacio topológico.

10.6. Otras propiedades algebraicas de la operación de clausura

Representamos por X el espacio métrico en consideración. Se verifican las siguientes fórmulas:

1. $$\overline{X} = X.$$

Esta fórmula se sigue inmediatamente de la definición de clausura.

2. $$\overline{A} - \overline{B} \subset \overline{A - B}.$$

Demostración. $A \cup B = (A - B) \cup B$, y por lo tanto,

$$\overline{A \cup B} = \overline{(A - B) \cup B}.$$

De esto, en virtud de (I), se sigue que $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A - B} \cup B$, y por tanto $\overline{A} \subset \overline{A - B} \cup \overline{B}$, de donde $\overline{A} - \overline{B} \subset \overline{A - B}$.

3. $$\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}.$$

Demostración. Como $A \cap B \subset A$ y $A \cap B \subset B$, tenemos, en virtud de la propiedad (I′), que $\overline{A \cap B} \subset \overline{A}$ y $\overline{A \cap B} \subset \overline{B}$, y, en consecuencia $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.

Con mayor generalidad es válida la siguiente fórmula:

4. $$\overline{\bigcap_t A_t} \subset \bigcap_t \overline{A}_t,$$

en donde la variable t recorre un conjunto arbitrario T.

Demostración. Como para todo $s \in T$ tenemos $\bigcap_t A_t \subset A_s$, en virtud de (I′) tenemos que $\overline{\bigcap_t A_t} \subset \overline{A}_s$, de lo que deducimos $\overline{\bigcap_t A_t} \subset \bigcap_s \overline{A}_s$. Sustituyendo el subíndice s por t obtenemos la fórmula 4.

5. $$\bigcup_t \overline{A}_t \subset \overline{\bigcup_t A_t}.$$

Demostración. Para todo s tenemos $A_s \subset \bigcup_t A_t$, y por tanto, en virtud de (I′) tenemos $\overline{A}_s \subset \overline{\bigcup_t A_t}$, y $\bigcup_s \overline{A}_s \subset \overline{\bigcup_t A_t}$. De esto se obtiene la fórmula 5.

6. *La clausura de un conjunto que consiste en un solo punto es el mismo conjunto:*

$$\overline{\{p\}} = \{p\}.$$

Esta propiedad no es una consecuencia de las fórmulas (I)-(IV)*; no obstante, es una consecuencia inmediata de la definición de clausura, ya que si $q = \lim_{n\to\infty} q_n$ con $q_n \in \{p\}$, entonces $p_n = q$ para $n = 1, 2, \ldots$, y por el Teorema 3, apartado 2, $\lim_{n\to\infty} q_n = p$, es decir $p = q$.

(*) Los espacios topológicos que satisfacen a la propiedad 6 son llamados espacios $\mathcal{T}_1$.

10.7. Puntos de acumulación y puntos aislados

Se dice que un punto p es *punto de acumulación* del conjunto A si es el límite de una sucesión de puntos pertenecientes al conjunto A y distintos de p. Todo punto del conjunto A que no es de acumulación de A se llama *punto aislado* de A.

Por ejemplo, el punto 0 es (el único) punto de acumulación del conjunto de los puntos a $1, 1/2, 1/3, \ldots, 1/n, \ldots$; todos los puntos de este conjunto son puntos aislados.

Se pueden demostrar fácilmente los teoremas siguientes:

Teorema 1. *La condición necesaria y suficiente para que el punto p sea un punto de acumulación del conjunto A es que todo entorno esférico de p contenga algún punto, distinto de p, del conjunto A.*

Teorema 2. *La condición necesaria y suficiente para que el punto p sea un punto aislado del conjunto A es que exista un entorno esférico K de p tal que $K \cap A = \{p\}$.*

10.8. Conjunto derivado

El conjunto de todos los puntos de acumulación de A se llama *conjunto derivado* de A y se designa por A^d.

El conjunto derivado posee las siguientes propiedades, de fácil demostración.

1. $\overline{A} = A \cup A^d$.
2. $\overline{A}^d = A^d$.
3. $(A \cup B)^d = A^d \cup B^d$.
4. $\bigcup_t A_t^d \subset (\bigcup_t A_t)^d$.
5. $A^{dd} \subset A^d$.

Por otra parte — en contraposición con la clausura — el segundo conjunto derivado no tiene por qué ser igual al original. Si, por ejemplo, A consiste en los puntos $1, 1/2, 1/3, \ldots$, entonces A^d consiste en el punto 0, y A^{dd} es el conjunto nulo. Si A es el conjunto de los números de la forma $1/n + 1/m$ $(n, m = 1, 2, \ldots)$, entonces $A^d \neq A^{dd} \neq A^{ddd} = \emptyset$.

EJERCICIOS

1. Probar los teoremas 3-7, apartado 2.

2. Un espacio $\mathcal{L}^*$ es un conjunto en el que a ciertas sucesiones $p_1, p_2, \ldots$ de elementos de este conjunto, llamadas *sucesiones convergentes*, se asigna un elemento $p = \lim_{n\to\infty} p_n$, llamado *límite de la sucesión*, de forma que los Teore-

mas 3-5, apartado 2 son válidos. Por tanto, los espacios métricos son espacios $\mathcal{L}^*$. Demostrar que los Teoremas 6 y 7, apartado 2, son válidos en espacios $\mathcal{L}^*$.

3. Consideremos un cierto espacio $\mathcal{L}^*$. Si $\lim_{n\to\infty} p_n = p$ y la sucesión $q_1, q_2, \ldots$ se obtienen por medio de repetición finita de los elementos de la sucesión $p_1, p_2, \ldots$, se verifica que $\lim_{n\to\infty} q_n = p$.

4. Sea Φ el espacio de todas las funciones continuas de variable real definidas en el intervalo cerrado [0, 1] (Cap. 9.1, Ejemplo 4). Probar que la igualdad $f = \lim_{n\to\infty} f_n$, con $f_n \in \Phi$, se verifica siempre y cuando la sucesión de funciones $f_1, f_2, \ldots$ converja uniformemente hacia la función f.

CAPÍTULO **11**

Diversos tipos de conjuntos

11.1. Conjuntos abiertos y conjuntos cerrados

Se dice que un conjunto A es cerrado si $\overline{A} = A$, es decir (por el Capítulo 10.5 (II)) si $\overline{A} \subset A$, o, dicho de otra forma: si las condiciones $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ y $x_n \in A$ implican que $x \in A$.

Se dice que un conjunto A es abierto si su complementario es cerrado, es decir, si $\overline{X - A} = X - A$, o, dicho de otra forma si $A = X - \overline{X - A}$, siendo X el espacio completo.

EJEMPLOS. 1. El conjunto nulo es cerrado, es decir, $\overline{\emptyset} = \emptyset$ (Capítulo 10.5, propiedad III); el espacio completo es también un conjunto cerrado (Cap. 10.6, propiedad I). De esto se sigue también que el conjunto nulo y el espacio completo son, asimismo, conjuntos abiertos.

2. En el espacio de los números reales el intervalo cerrado $a \leqslant x \leqslant b$ es un conjunto cerrado. Nuestra terminología, por tanto, concuerda con la terminología empleada en Análisis. Por otra parte, el intervalo abierto $a < x < b$ para $a < b$ es un conjunto abierto que no es cerrado.

3. Si f es una función continua de variable real definida en el intervalo cerrado $a \leqslant x \leqslant b$, entonces, dicha función, es decir, el conjunto de puntos

$$A = \mathbf{E}_{x,y}\{[y = f(x)] \wedge (a \leqslant x \leqslant b)\},$$

es un conjunto cerrado.

En efecto, sea $p \in \overline{A}$, es decir $p = \lim_{n\to\infty} p_n$, con $p_n \in A$. Los puntos p_n son, por tanto, de la forma

(1) $$p_n = \langle x_n, f(x_n)\rangle,$$

(2) $$a \leqslant x_n \leqslant b.$$

Siendo $p = \langle x, y \rangle$, como $p = \lim_{n\to\infty} p_n$, tenemos:

(3) $$\lim_{n\to\infty} x_n = x,$$

(4) $$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = y.$$

De (2) y (3) se sigue que $a < x < b$.

Pero, a causa de la continuidad de la función f, de (3) se sigue que

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$$

y por tanto, que $y = f(x)$, en virtud de (4), es decir $p = \langle x, f(x) \rangle$ y por definición de conjunto A tenemos: $p \in A$.

Así hemos demostrado que $\overline{A} \subset A$, es decir, que el conjunto A es cerrado.

4. Todo conjunto finito es cerrado.

Omitimos la sencilla demostración de este aserto, que puede basarse en la propiedad 6 del Capítulo 10.6, y en la fórmula (I) del Capítulo 10.5.

5. El conjunto de los enteros, así como cada uno de sus subconjuntos, es cerrado en el espacio de los números reales.

6. El conjunto derivado A^d es un conjunto cerrado (v. Cap. 10.8, propiedad 2).

7. Si p es un punto aislado del espacio, entonces el conjunto $\{p\}$ es abierto (y también cerrado).

11.2. Operaciones con conjuntos cerrados y con conjuntos abiertos

Teorema 1. *La unión de dos conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.*

En efecto, si los conjuntos A y B son cerrados, es decir, $\overline{A} = A$ y $\overline{B} = B$, entonces

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B} = A \cup B.$$

Este teorema se puede generalizar (por inducción) a un número *finito* arbitrario de conjuntos. La unión de un número infinito de conjuntos cerrados puede ser, o no, un conjunto cerrado: si, por ejemplo, $A_n = \{1/n\}$, la reunión $A_1 \cup A_2 \cup \ldots$ no es un conjunto cerrado (en el espacio de los números reales), ya que el punto 0 no pertenece a él, pero si a su clausura.

Teorema 2. *La intersección de un número arbitrario de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.*

En efecto, si los conjuntos A son cerrados, es decir $\overline{A}_t = A_t$ entonces por la fórmula 4 del Capítulo 10.6, tenemos

$$\overline{\bigcap_t A_t} \subset \bigcap_t \overline{A}_t = \bigcap_t A_t,$$

por lo que el conjunto $\bigcap_t A_t$ es cerrado.

Teorema 1'. *La intersección de un número finito de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.*

Teorema 2'. *La unión de un número arbitrario de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.*

Estas propiedades se siguen de las propiedades 1 y 2 utilizando las fórmulas de Morgan (véase Capítulo 2.4 (30) y Capítulo 4.2 (4)):

$$X - A \cap B = (X - A) \cup (X - B), \quad X - \bigcup_t A_t = \bigcap_t (X - A_t).$$

En efecto, si los conjuntos A y B son abiertos, entonces los conjuntos $X - A$ y $X - B$ son cerrados, por lo que el conjunto

$$X - A \cap B = (X - A) \cup (X - B)$$

es también cerrado, es decir el conjunto $A \cap B$ es abierto. La generalización de estos teoremas al caso de un número arbitrario finito de conjuntos es inmediata.

Si los conjuntos A_t son abiertos, o sea, los conjuntos $X - A_t$ cerrados, entonces el conjunto $X - \bigcup_t A_t = \bigcap_t (X - A_t)$ es cerrado, es decir, el conjunto $\bigcup_t A_t$ es abierto.

Nota. Los teoremas 1, 1' y 2, 2' son ejemplos de la llamada *dualidad* en Topología: a todo teorema sobre conjuntos cerrados corresponde, en virtud de las fórmulas de Morgan, un teorema sobre conjuntos abiertos, y recíprocamente.

11.3. Interior y frontera de un conjunto. Entorno de un punto

Definiciones. Para un conjunto arbitrario A, el conjunto

$$\mathrm{Int}\,(A) = X - \overline{X - A}$$

se denomina *interior* del conjunto A, y el conjunto

$$\mathrm{Fr}\,(A) = \overline{A} \cap \overline{X - A}$$

se denomina *frontera* del conjunto A.

Analicemos las definiciones anteriores más detalladamente.

La condición $p \in X - \overline{X - A}$ significa que $p \notin \overline{X - A}$. Por tanto, un punto p pertenece al conjunto Int (A) siempre y cuando exista un entorno esférico K de p tal que $K \cap (X - A) = \emptyset$, o sea, $K \subset A$ (cfr. Cap. 10.4, nota).

Los *puntos interiores* del conjunto A (es decir, aquellos que pertenecen al interior del conjunto) son, por tanto, los puntos p para los que existe un entorno esférico contenido en el conjunto A.

Por definición, un conjunto A es abierto siempre y cuando $A = \overline{X - \overline{X - A}}$, es decir, si $A = \text{Int}(A)$. Por tanto, para todo punto p de un conjunto abierto, existe una esfera, con centro en p, que está del todo en el conjunto A. Esta propiedad caracteriza también a los conjuntos abiertos.

De esto se sigue que $K(p, \varepsilon)$ es un conjunto abierto, pues si $x \in K(p, \varepsilon)$, $K(x, \varepsilon - |x - p|) \subset K(p, \varepsilon)$.

Como se sigue de la definición (cfr. el Teorema en Cap. 10.4), los puntos frontera p del conjunto A tienen la propiedad de que todo $K(p, \varepsilon)$ tiene puntos comunes con el conjunto A, así como con el complementario de A.

El interior del intervalo cerrado $a \leqslant x \leqslant b$ en el espacio de los números reales es el intervalo abierto $a < x < b$, y su frontera el conjunto formado por los extremos a y b.

El interior del círculo cerrado $\mathbf{E}_x\{|x - p| \leqslant \varrho\}$ en el plano es el círculo abierto $\mathbf{E}_x\{|x - p| < \varrho\}$ y su frontera es la circunferencia $\mathbf{E}_x\{|x - p| = \varrho\}$.

Se dice que un conjunto A es un *entorno* de p si $p \in \text{Int}(A)$, es decir, si p es un punto interior del conjunto A. Por tanto, un conjunto abierto es un entorno de cada uno de sus puntos. Cualquier entorno de un punto p contiene un entorno abierto del punto p; precisamente, su interior.

Con mayor generalidad decimos que un conjunto A es un entorno del conjunto B si $B \subset \text{Int}(A)$.

11.4. Conjuntos densos y conjuntos frontera

Se dice que un conjunto A es *denso* (en X) si $\overline{A} = X$. Se dice que un conjunto A es un *conjunto frontera* si su complementario es un conjunto denso, es decir, si $\overline{X - A} = X$. (Un conjunto cuya clausura es un conjunto frontera se dice también que es un conjunto *totalmente no denso*).

Evidentemente, todo conjunto que contiene un conjunto denso es denso y todo subconjunto de un conjunto frontera es un conjunto frontera.

En el espacio $\mathcal{E}$ de todos los números reales, el conjunto de los números racionales es a la vez un conjunto denso y un conjunto frontera. En el plano $\mathcal{E}^2$ una recta es un conjunto frontera.

Se puede probar fácilmente (aplicando el teorema del Capítulo 10, apartado 4) la validez de los siguientes teoremas:

Teorema 1. *Un conjunto A es denso siempre y cuando en todo entorno esférico existan puntos que pertenecen a A.*

Teorema 2. *Un conjunto A es un conjunto frontera siempre y cuando en todo entorno esférico existan puntos que no pertenecen a A.*

Teorema 3. *Un conjunto cerrado A es frontera siempre y cuando para todo entorno esférico K exista un entorno esférico $L \subset K$, tal que $L \cap A = \emptyset$.*

La unión de dos conjuntos frontera no es necesariamente otro conjunto frontera. Por ejemplo, el conjunto de los números irracionales y el conjunto de los racionales son ambos conjuntos frontera (en el espacio de los números reales), pero su reunión no es un conjunto frontera. Pero se puede demostrar el teorema siguiente:

Teorema 5. *Si un conjunto A es frontera y el conjunto B es un conjunto frontera y cerrado, entonces $A \cup B$ es un conjunto frontera.*

Sugerencia para la demostración: Aplicando la fórmula 2 del Capítulo 10.6, tenemos

$$X - B = \overline{X - A} - \overline{B} \subset \overline{(X - A) - B} = \overline{X - (A \cup B)}.$$

11.5. Conjuntos densos en sí

Se dice que un conjunto es *denso en sí* cuando cada uno de sus puntos es punto de acumulación de dicho conjunto.

Por tanto, estos conjuntos están caracterizados por la inclusión

(1) $$A \subset A^d$$

o bien, por la condición — que se reduce a lo mismo — de que no tengan puntos aislados.

Teorema 1. *La clausura de un conjunto denso en sí es también denso en sí.*

Demostración. Sea A un conjunto denso en sí y, por tanto, que satisfaga la fórmula (1). Según esto, en virtud de la fórmula (1) del Capítulo 10.8, tenemos

(2) $$A^d = A \cup A^d = \overline{A},$$

y por tanto, aplicando las fórmulas 3 y 5 del Capítulo 10.8, obtenemos

$$(\overline{A})^d = (A \cup A^d)^d = A^d \cup A^{dd} = A^d,$$

de donde por (2), tenemos que $(\overline{A})^d = \overline{A}$. Por tanto, el conjunto $\overline{A}$ satisface la condición (1).

Teorema 2. *La unión de un número arbitrario de conjuntos densos en sí es un conjunto denso en sí.*

En efecto, si $A_t \subset A_t^d$, entonces, en virtud de la fórmula (4) del Capítulo 10.8, tenemos

$$\bigcup_t A_t \subset \bigcup_t A_t^d \subset (\bigcup_t A_t)^d.$$

Teorema 3. *Todo espacio es la unión de dos conjuntos, uno de los cuales es cerrado y denso en sí y el otro no contiene ningún conjunto no vacío que sea denso en sí* (*).

DEMOSTRACIÓN. Designemos por C la reunión de todos los subconjuntos densos en sí del espacio dado. Del Teorema 2 se sigue que el conjunto $\overline{C}$ es denso en sí, y, por tanto, en virtud del Teorema 1, que el conjunto C es también denso en sí, por lo que es también un subconjunto de C. Así $\overline{C} \subset C$, es decir, el conjunto C es cerrado. Finalmente, el conjunto $X - C$, por ser disjunto de C, no contiene conjuntos no vacíos densos en sí.

*11.6. Conjuntos de Borel

Los conjuntos de Borel son conjuntos que pertenecen a la menor familia $\mathbf{R}$ de subconjuntos de un espacio dado que satisfacen las siguientes condiciones:

(a) *Todo conjunto cerrado pertenece a* $\mathbf{R}$.

(b) *Si* $X_n \in \mathbf{R}$ *para* $n = 1, 2, \ldots,$ *entonces* $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n \in \mathbf{R}$.

(c) *Si* $X_n \in \mathbf{R}$ para $n = 1, 2, \ldots,$ *entonces* $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n \in \mathbf{R}$.

Por tanto, una familia de conjuntos de Borel es, en el sentido de la terminología del Capítulo 4.7, una familia de Borel generada por la familia de los conjuntos cerrados.

Llamamos *unión numerable* de conjuntos a la unión de un número finito o de una infinidad numerable de conjuntos. Lo análogo vale para *intersección numerable.* Una unión numerable de conjuntos cerrados se llama un conjunto F_σ. Una intersección numerable de conjuntos abiertos se llama un conjunto G_δ.

De la definición se sigue inmediatamente que todo conjunto F_σ es un conjunto de Borel. Mostraremos después que también todo conjunto G_δ es un conjunto de Borel (véase Capítulo 12.8, nota).

Haciendo uso de los números ordinales podemos clasificar los conjuntos de Borel en clases $\mathbf{R}_\alpha$, siendo $\alpha < \Omega$, de la forma siguiente:

1. La clase $\mathbf{R}_0$ es la familia de todos los conjuntos cerrados.

2. Para $\alpha = \lambda + n > 0$, siendo λ un límite ordinal y n un entero no negativo, la clase $\mathbf{R}_\alpha$ es la familia de todos los conjuntos de la forma

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} X_k \quad \text{o} \quad \bigcup_{k=1}^{\infty} X_k$$

(*) Los conjuntos que son simultáneamente cerrados y densos en sí se llaman también *conjuntos perfectos*. Están, por tanto, caracterizados por la igualdad $A = A^d$. Los conjuntos que no tienen subconjuntos no vacíos que sean densos en sí se llaman también *conjuntos diseminados*.

según n sea par o impar, y los conjuntos $X_1, X_2, \ldots$ pertenecen a clases de índices menores que α.

Por lo tanto, en particular, la clase $\mathbf{R}_1$ es la familia de todos los conjuntos F_σ. La clase $\mathbf{R}_2$ es la familia de intersecciones numerables de conjuntos F_σ (son los así llamados conjuntos $F_{\sigma\delta}$), y así sucesivamente.

Se puede demostrar que para todo $\alpha < \Omega$ existe en el espacio de los números reales un conjunto de la clase $\mathbf{R}_\alpha$ que no pertenece a ninguna clase con índice menor que α.

Nota. Si partimos de conjuntos abiertos en vez de conjuntos cerrados (cfr. condición (a)), obtenemos una familia de Borel generada por la familia de conjuntos abiertos (que, como se puede demostrar, es idéntica a la familia de Borel considerada arriba, generada por la familia de conjuntos cerrados; véase Cap. 12.7). Aquí los conjuntos abiertos forman la clase cero, los conjuntos G_δ forman la primera clase, los conjuntos $G_{\delta\sigma}$ forman la segunda, y así sucesivamente. Esta clasificación es la dual de la clasificación considerada anteriormente.

EJERCICIOS

1. Demostrar que si el conjunto G es abierto, son válidas las siguientes reglas para todo conjunto X:

(a) $$G \cap \overline{X} \subset \overline{G \cap X},$$

(b) $$\overline{G \cap \overline{X}} = \overline{G \cap X}.$$

2. Demostrar las fórmulas:

(a) $\mathrm{Int}\,(X \cap Y) = \mathrm{Int}\,(X) \cap \mathrm{Int}\,(Y)$,

(b) $X \subset Y$ implica $\mathrm{Int}\,(X) \subset \mathrm{Int}\,(Y)$,

(c) $\bigcup_t \mathrm{Int}\,(X_t) \subset \mathrm{Int}\,(\bigcup_t X_t)$,

(d) $\mathrm{Fr}(X) = X \cap \overline{X^c} \cup (\overline{X} - X)$,

(e) $\overline{X} = X \cup \mathrm{Fr}(X)$,

(f) $\mathrm{Fr}(X \cup Y) \cup \mathrm{Fr}(X \cap Y) \cup (\mathrm{Fr}(X) \cap \mathrm{Fr}(Y)) = \mathrm{Fr}(X) \cup \mathrm{Fr}(Y)$,

(g) $\mathrm{Fr}[\mathrm{Int}\,(X)] \subset \mathrm{Fr}(X)$,

(h) $\mathrm{Int}\,(X) \cap \mathrm{Fr}(X) = \emptyset$.

3. Probar que: (a) el complemento de un conjunto G_δ es un conjunto F_σ; (b) la reunión de una sucesión infinita de conjuntos F_σ es un conjunto F_σ; la intersección de dos conjuntos F_σ es un conjunto F_σ. Enunciar los teoremas duales de (b) sobre conjuntos G_δ (utilícense las reglas de Morgan).

4. Dado que un subconjunto arbitrario E de un espacio métrico $\mathcal{X}$ es también un espacio métrico, podemos definir para todo conjunto $A \subset E$ la clausura (o cierre) de A en el espacio E, llamada también *clausura relativa* (*o cierre relativo*) *de* A en E, de la forma siguiente: incluimos un punto p

en la clausura relativa del conjunto A en E si $p \in E$ y $p = \lim_{n\to\infty} p_n$, en donde $p_n \in A$. Esto significa que $p \in \overline{A} \cap E$.

El conjunto $\overline{A} \cap E$ es, por lo tanto, la clausura relativa del conjunto A en E.

Demostrar los siguientes teoremas (para espacios topológicos, suponiendo que $\overline{A} \cap E$ es, por definición, la clausura relativa de A en E):

(a) La clausura relativa satisface los axiomas I-IV referidos al conjunto E, esto es, para conjuntos arbitrarios $A \subset E$ y $B \subset E$, tenemos

$$(\mathrm{I}_E)\quad \overline{A \cup B} \cap E = (\overline{A} \cap E) \cup (\overline{B} \cap E), \qquad (\mathrm{II}_E)\quad A \subset (\overline{A} \cap E),$$

$$(\mathrm{III}_E)\quad \overline{\emptyset} \cap E = \emptyset, \qquad (\mathrm{IV}_E)\quad \overline{\overline{A} \cap E} \cap E = \overline{A} \cap E.$$

(b) El conjunto A es abierto en E si

$$A = E - \overline{E - A},$$

y A es cerrado en E si

$$\overline{A} \cap E = A.$$

(c) Una condición necesaria y suficiente para que el conjunto A sea cerrado (abierto) en E es que sea la intersección del conjunto E y de un conjunto cerrado (abierto).

(d) La *frontera relativa* del conjunto A en E es el conjunto

$$\mathrm{Fr}_E(A) = \overline{A} \cap E \cap \overline{E - A}$$

y el interior relativo del conjunto A en E es

$$\mathrm{Int}_E(A) = E - \overline{E - A}.$$

5. Mostrar que si el conjunto A es cerrado en el espacio X y el conjunto B es cerrado en el espacio Y, el conjunto $A \times B$ es, entonces, cerrado en el espacio $X \times Y$.

Demostrar el teorema análogo para conjuntos abiertos.

6. Sea $A \subset X$, $B \subset Y$. Demostrar las siguientes fórmulas:

$$\mathrm{Int}(A \times B) = \mathrm{Int}(A) \times \mathrm{Int}(B)$$
$$\mathrm{Fr}(A \times B) = [\mathrm{Fr}(A) \times B] \cup [A \times \mathrm{Fr}(B)]$$

7. Una condición necesaria y suficiente para que el producto cartesiano $A \times B$ sea denso en sí es que alguno de los conjuntos A y B, sea denso en sí.

8. Todo subconjunto abierto de un espacio denso en sí es denso en sí.

9. Si los conjuntos A y $X - A$ son conjuntos frontera, el espacio X es denso en sí.

10. El conjunto $\mathrm{Int}[\mathrm{Fr}(A)]$ es denso en sí.

11. Entendemos por *espacio de Hausdorff* un conjunto arbitrario X en el cual a todo elemento p están asignados ciertos subconjuntos del conjunto X —llamados *entornos* de p— de forma que se satisfagan las cuatro condiciones siguientes:

A. Todo punto $p \in X$ pertenece a cada uno de sus entornos.

B. Si U y V son entornos del punto p, existe un entorno de p contenido en $U \cap V$.

C. Si U es un entorno de p y $q \in U$, existe un entorno de q contenido en U.

D. Si $p \neq q$, entonces existen entornos disjuntos U de p y V de q.

Demostrar 1.°) que todo espacio métrico es un espacio de Hausdorff (en donde los entornos del punto p son los conjuntos abiertos que contienen a p) y 2.°) que todo espacio de Hausdorff satisface las condiciones (I)-(IV) del Capítulo 10.5, si la clausura viene definida en este espacio como sigue: $p \in \overline{X}$ siempre y cuando todo entorno U del punto p satisfaga la desigualdad $U \cap X \neq \emptyset$.

A un espacio topológico que satisface la condición D le llamamos un espacio $\mathcal{T}_2$. Dar un ejemplo de un espacio $\mathcal{T}_1$ que no sea espacio $\mathcal{T}_2$.

Demostrar que el aserto 1.° se puede hacer más fuerte del modo siguiente: todo espacio $\mathcal{T}_2$ lo es de Hausdorff.

12. Demostrar que el concepto de espacio topológico (véase apartado 10.5, Nota) es equivalente a lo que sigue. El término «conjunto abierto» que simplemente decimos «abierto» se considera como primitivo y se enuncian los siguientes axiomas:

1. La unión de un número arbitrario de abiertos es un abierto.
2. La intersección de dos abiertos es un abierto.
3. El conjunto nulo es abierto.
4. El espacio es abierto.

La clausura de A es, por definición, la intersección de todos los conjuntos cerrados (esto es, de los complementos de los abiertos) que contienen a A.

13. De un modo similar, demostrar que el concepto de espacio topológico se puede definir considerando $\mathrm{Int}(A)$ como término primitivo y suponiendo los siguientes axiomas:

$$\mathrm{Int}(A \cap B) = \mathrm{Int}(A) \cap \mathrm{Int}(B), \qquad \mathrm{Int}(A) \subset A,$$
$$\mathrm{Int}(X) = X, \qquad \mathrm{Int}[\mathrm{Int}(A)] = \mathrm{Int}(A).$$

14. Una familia de conjuntos abiertos no vacíos se llama una *base* del espacio dado si todo conjunto abierto es la reunión de un cierto número de conjuntos pertenecientes a esta familia (comp. apartado 1, XIII, Teorema 2).

Una familia de conjuntos se llama *subbase* si la familia de las intersecciones de sus elementos forman una base.

Sea $\{X_t\}$, con $t \in T$, una familia dada de espacios topológicos $\mathcal{T}_1$. Mostrar que el producto cartesiano de $\mathrm{P}_t X_t$ (cfr. Cap. 4.8), resulta un espacio $\mathcal{T}_1$ al suponer que los conjuntos de la forma

$$\mathfrak{G} = E_{\mathfrak{z}}(\mathfrak{z}^t \in G),$$

en donde G es abierto en X_t, forman una subbase.

15. Demostrar que en el caso de espacios métricos y de T finito (o numerable), la definición anterior de conjunto abierto concuerda con la definición basada en el concepto de distancia dado por la fórmula (7), Cap. 9.3.

16. Una familia $\{X_t\}$ de subconjuntos de un espacio dado se llama *localmente finita* si para cada punto del espacio, existe un entorno que tenga puntos comunes con sólo un número finito de conjuntos X_t. Mostrar, bajo esta hipótesis, que

$$\overline{\bigcup_t X_t} = \bigcup_t \overline{X_t}.$$

17. Sean X un espacio topológico y ϱ una relación de equivalencia (comp. Ejercicio 9, Cap. 5). Definimos una topología en el espacio cociente X/ϱ suponiendo que un subconjunto $\mathbf{R}$ de X/ϱ sea abierto siempre y cuando el conjunto $S(\mathbf{R})$ sea abierto (en X). Mostrar que X/ϱ es un espacio topológico.

18. Una relación ϱ se llama *cerrada* si el conjunto $\mathbf{E}_{x,y} x\varrho y$ es cerrado en el espacio producto $X \times X$.

Demostrar que si el espacio cociente X/ϱ es un espacio $\mathcal{T}_2$, entonces la relación ϱ es cerrada.

CAPÍTULO **12**

Aplicaciones continuas

12.1 Aplicaciones continuas

Definición. Decimos que una función f definida para todo punto x del espacio X y que toma valores $f(x)$ en el espacio Y, es *continua en el punto* x_0 si la condición

(1) $$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$$

implica

(2) $$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$$

para toda sucesión de puntos $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, con $x_n \in X$.

Esta definición es análoga a la definición de continuidad de una función real de variable real, que se conoce en Análisis como definición de Heine. Vamos a demostrar que es equivalente a la siguiente definición de Cauchy.

Teorema. *La condición necesaria y suficiente para que la función f sea continua en el punto $x_0 \in X$ es que para todo $\varepsilon > 0$, exista un número $\delta > 0$ tal que la condición*

(3) $$|x - x_0| < \delta$$

implique

(4) $$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

para todo $x \in X$.

Utilizando el simbolismo de la lógica, podemos escribir esta condición en la forma siguiente:

(5) $$\bigwedge_\varepsilon \bigvee_\delta \bigwedge_x \{(|x - x_0| < \delta) \Rightarrow (|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)\}.$$

DEMOSTRACIÓN. Supongamos en primer lugar que la función es continua en el punto x_0 y que no se satisface la condición (5), es decir, que

existe un $\varepsilon > 0$ tal que para un $\delta > 0$ arbitrario existe una x para la cual $|x - x_0| < \delta$, pero $|f(x) - f(x_0)| \geqslant \varepsilon$, es decir

$$\bigvee_{\varepsilon} \bigwedge_{\delta} \bigvee_{x} (|x - x_0| < \delta) \wedge (|f(x) - f(x_0)| \geqslant \varepsilon).$$

Tomemos un $\delta = 1/n$. Existe (por el axioma de la elección) una sucesión de puntos $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ tal que

(6) $$|x_n - x_0| < 1/n$$

y

(7) $$|f(x_n) - f(x_0)| \geqslant \varepsilon.$$

La igualdad (1) se sigue inmediatamente de la desigualdad (6); por tanto, siendo la función f continua en el punto x_0, tenemos la igualdad (2). Pero esta igualdad está en contradicción con la desigualdad (7); por lo tanto, la hipótesis de que no se cumpla la condición (5) nos conduce a una contradicción.

A continuación, supongamos que la función f satisface la condición (5). Para todo $\varepsilon > 0$ existirá un número $\delta > 0$ que satisface la implicación de la fórmula (5). Supongamos que se satisface la condición (1). Entonces existe un k tal que $|x_n - x_0| < \delta$ para $n > k$. Por lo tanto $|f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon$. Esto significa que se verifica la igualdad (2) y que, por lo tanto, la función f es continua en el punto x_0.

12.2. Funciones que son continuas en todo punto

A las funciones que son continuas en todo punto se les llama, brevemente, funciones *continuas*.

El conjunto de las funciones continuas definidas para todo $x \in X$ y que toman valores en el espacio Y se designa por el símbolo Y^X. [Designamos este conjunto también por $(Y^X)_{\text{top}}$, para distinguirlo del símbolo empleado en Teoría de conjuntos para designar el conjunto de todas las funciones que transforman X en Y (véase Capítulo 6.2). Como, no obstante, sólo consideraremos funciones continuas, para simplificar nuestra notación, omitiremos el subíndice « top », teniendo siempre presente que el símbolo Y se usa en sentido topológico.]

Teorema 1. *Condición necesaria y suficiente para que la función f sea continua, es decir, que $f \in Y^X$, es que para todo conjunto cerrado B contenido en el espacio Y, el conjunto $f^{-1}(B)$ sea cerrado (en el espacio X); dicho de otra forma, que la imagen inversa de un conjunto cerrado sea un conjunto cerrado.* (El significado del símbolo f^{-1} se dio en el Capítulo 4.4).

Demostración. Supongamos que la función f es continua y que $\bar{B} = B$. Supongamos también que la condición (1) se verifica con

(8) $x_n \in f^{-1}(B)$, es decir, $f(x_n) \in B$ para $n = 1, 2, \ldots$

Como la función f es continua se verifica la fórmula (2) y, por lo tanto $f(x_0) \in \overline{B}$; pero como $\overline{B} = B$, se deduce que $f(x_0) \in B$, es decir, que $x_0 \in f^{-1}(B)$. Luego el conjunto $f^{-1}(B)$ es cerrado.

A continuación, supongamos que la función f no es continua. Tenemos que definir un conjunto cerrado $B \subset Y$ tal que el conjunto $f^{-1}(B)$ no sea cerrado.

Por hipótesis, existe una sucesión $x_1, x_2, \ldots$ que satisface la condición (1), pero que no satisface la condición (2). De esto deducimos (Capítulo 10.2, Teorema 1) que existe un entorno abierto esférico K de $f(x_0)$ y una sucesión de índices $k_1 < k_2 < \ldots$ tal que para todo n tenemos

(9) $$f(x_{k_n}) \notin K.$$

Sea $B = Y - K$. El conjunto B es, pues, cerrado. A la vez, en virtud de (9), tenemos

(10) $f(x_{k_n}) \in B$, es decir, $x_{k_n} \in f^{-1}(B)$ para $n = 1, 2, \ldots,$

y

(11) $f(x_0) \in K$, es decir, $f(x_0) \notin B$, de donde $x_0 \notin f^{-1}(B)$.

Como $x_0 = \lim_{n\to\infty} x_{k_n}$ (por (1)), el conjunto $f^{-1}(B)$ no es cerrado.

Corolario 1. *Una condición necesaria y suficiente para que una función f sea continua es que la imagen inversa de todo conjunto abierto sea abierto.*

La fórmula

$$f^{-1}(Y - B) = X - f^{-1}(B)$$

nos proporciona la demostración de este Corolario (cfr. Cap. 4.4 (16)).

Corolario. 2. *Si f es una función continua de variable real, los conjuntos*

$$\mathbf{E}_x[f(x) \leqslant a], \quad \mathbf{E}_x[f(x) \geqslant a], \quad \mathbf{E}_x[a \leqslant f(x) \leqslant b]$$

son cerrados, y los conjuntos

$$\mathbf{E}_x[f(x) < a], \quad \mathbf{E}_x[f(x) > a], \quad \mathbf{E}_x[a < f(x) < b]$$

son abiertos.

Esto es cierto por ser estos conjuntos imágenes inversas de los conjuntos cerrados

$$\mathbf{E}_y(y \leqslant a), \quad \mathbf{E}_y(y \geqslant a), \quad \mathbf{E}_y(a \leqslant y \leqslant b)$$

y de los conjuntos abiertos

$$\mathbf{E}_y(y < a), \quad \mathbf{E}_y(y > a), \quad \mathbf{E}_y(a < y < b),$$

respectivamente.

Teorema 2. *Si $f \in Y^X$, entonces f es un conjunto cerrado en el espacio* $X \times Y$.

La demostración no difiere de la dada en el Capítulo 11.1, Ejemplo 3, para el caso particular en que X representa el intervalo cerrado $a \leq x \leq b$ e Y el conjunto de los números reales.

12.3. Funciones uno-uno. Homeomorfismos

Como dijimos en el Capítulo 5.1, f es uno-uno si para todo par de puntos $x \neq x'$ tenemos que $f(x) \neq f(x')$, es decir, si

(12) $$[f(x) = f(x')] \Rightarrow (x = x').$$

Para cada función f uno-uno, existe una *función inversa* $g = f^{-1}$ definida para $y \in f(X)$ por la equivalencia

(13) $$[g(y) = x] \equiv [y = f(x)].$$

Si la función f es continua, uno-uno y su inversa f^{-1} es también continua, decimos que f es un *homeomorfismo*.

Decimos que los espacios X e Y son homeomorfos, y escribimos

$$X \underset{\text{top}}{=} Y$$

si existe una función f homeomorfa que aplica X sobre el espacio completo Y, es decir, $Y = f(X)$.

Es claro que

1. $(f^{-1})^{-1} = f$.

2. Si f es un homeomorfismo, entonces f^{-1} es también un homeomorfismo.

3. La relación de homeomorfismo es reflexiva, simétrica y transitiva.

Teorema 1. *Una condición necesaria y suficiente para que una función f sea un homeomorfismo es que sean equivalentes las condiciones* (1) *y* (2), *es decir, que tengamos la equivalencia*

(14) $$(\lim_{n\to\infty} x_n = x_0) \equiv [\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)].$$

Demostración. Supongamos que la función f es un homeomorfismo. Entonces por la continuidad de f tenemos

(15) $$(\lim_{n\to\infty} x_n = x_0) \Rightarrow [\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)],$$

por ser f uno-uno tenemos para $g = f^{-1}$ (cfr. (13)):

(16) $$x_n = g(y_n) \quad \text{e} \quad y_n = f(x_n).$$

Como la función g es continua por hipótesis, tenemos que

(17) $$(\lim_{n\to\infty} y_n = y_0) \Rightarrow [\lim_{n\to\infty} g(y_n) = g(y_0)],$$

es decir

(18) $$[\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)] \Rightarrow (\lim_{n\to\infty} x_n = x_0).$$

Las (15) y (18) dan la equivalencia (14).

Recíprocamente, si suponemos la equivalencia (14), evidentemente se verifica (15), y, por lo tanto, la función es continua.

Al mismo tiempo, también se verifica (18), de donde se deduce que la función f es uno-uno. En efecto, tomemos una x tal que

(19) $$f(x) = f(x_0)$$

y hagamos

(20) $$x_n = x \quad \text{para} \quad n = 1, 2, \ldots$$

Por tanto, tenemos que $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$, de donde, en virtud de (19), $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$ y por (18) $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$.

Por otra parte, se sigue de (20) que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, de lo que obtenemos que $x = x_0$.

Así hemos demostrado que la igualdad $x = x_0$ se sigue de la (19). Esto significa, de acuerdo con (12), que la función f es uno-uno.

Consideremos ahora $g = f^{-1}$. Aplicando (16) y (18) (que se verifican por hipótesis) obtenemos la fórmula (17), que nos dice que la función g es continua.

Luego f es un homeomorfismo.

Teorema 2. *Una condición necesaria y suficiente para que una función uno-uno f sea un homeomorfismo es que las imágenes y las imágenes inversas de conjuntos cerrados sean también conjuntos cerrados.*

Demostración. Supongamos que la función f es un homeomorfismo. Sea $g = f^{-1}$. La función g será continua y, por lo tanto, en virtud del Teorema 1, apartado 2, para todo subconjunto cerrado A del espacio X es cerrado el conjunto $g^{-1}(A)$. Como, no obstante, $g^{-1} = f$ (cfr. 1), esto significa que el conjunto $f(A)$, es decir, la imagen de conjunto A, es un conjunto cerrado.

También se verifica que las imágenes inversas de conjuntos cerrados son conjuntos cerrados, por ser continua la función f (cfr. Teorema 1, apartado 2).

Recíprocamente, supongamos que el conjunto $f(A)$, así como el conjunto $f^{-1}(B)$, son cerrados, supuesto que los conjuntos $A \subset X$ y $B \subset Y$ lo

son. Como $f = g^{-1}$, se sigue de esto (por el teorema arriba citado) que las funciones f y g son continuas, es decir que f es un homeomorfismo.

Nota. Como ya mencionamos en la Introducción, la Topología es el estudio de los invariantes por homeomorfismos, es decir, de aquellas propiedades que, si pertenecen a un espacio dado, se verifican también en todo espacio homeomorfo a él. Podemos demostrar en general (mediante el Teorema 1, apartado 3) que toda propiedad que sea formulable con términos de la Teoría de conjuntos y del concepto de límite, es invariante por homeomorfismos.

12.4. Ejemplos de homeomorfismo

1. Sean $a \leq x \leq b$ y $c \leq y \leq d$, con $a < b$ y $c < d$, dos intervalos cerrados dados de números reales. La función

$$y = \{(d - c)/(b - a)\}x + (bc - ad)/(b - a)$$

es un homeomorfismo que transforma el primer intervalo en el segundo. Por tanto, dos intervalos cerrados cualesquiera son homeomorfos.

Esta misma función transforma el intervalo abierto $a < x < b$ homeomórficamente en el intervalo abierto $c < y < d$.

2. La función $y = \operatorname{tg} x$ transforma el intervalo abierto $-\pi/2 < x < \pi/2$ homeomórficamente en todo el conjunto de los números reales. Su inversa es la función $x = \operatorname{arc\,tg} y$.

3. Una condición necesaria y suficiente para que una función real, definida en el intervalo cerrado $a \leq x \leq b$, sea un homeomorfismo, es que sea estrictamente monótona.

4. Consideremos la superficie de la esfera $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1$ en el espacio euclídeo de tres dimensiones y tracemos una recta no paralela al plano XY a partir del punto $b = (0, 0, 2)$. Asignemos al punto p de intersección de esta recta con la superficie esférica el punto $f(p)$, que es el punto de intersección de la recta con el plano $z = 0$.

La función f así definida es, como se puede verificar fácilmente, un homeomorfismo que, prescindiendo del punto b, transforma la superficie de la esfera en todo el plano. Por lo tanto, el plano es homeomorfo a la superficie esférica con un punto eliminado.

Se hace uso de esto en la teoría de funciones analíticas, cuando se dice que el plano complejo se completa con « el punto del infinito » en la superficie esférica.

Nota 1. En la definición de homeomorfismo, la condición de la continuidad de la aplicación inversa es esencial, lo que significa que la continuidad de la transformación f no implica la continuidad de la transforma-

ción f^{-1}. Por ejemplo, la función $z = e^{2\pi i x}$ transforma el conjunto $0 \leq x < 1$ en el conjunto de los números complejos sobre la circunferencia de ecuación $|z| = 1$ de forma continua y biunívoca. No obstante, la transformación inversa no es continua en el punto $z = 1$.

Teorema 5. *Todo espacio métrico es homeomorfo a un espacio acotado.*

Sea X un espacio métrico. Introduzcamos en él una « nueva distancia » haciendo que $\|x - y\| = |x - y|$ si $|x - y| < 1$, pero $\|x - y\| = 1$ si $|x - y| > 1$.

Es fácil de comprobar que la nueva distancia $\|x - y\|$ satisface las condiciones (1)-(3) dadas en la definición de un espacio métrico (Cap. 9.1).

Mediante la introducción de la nueva distancia $\|x - y\|$ entre los puntos del espacio X, hemos transformado este espacio en un espacio métrico X^*. Designemos esta transformación por f. Esta función, o sea, $f(x) = x$, es un homeomorfismo. Para establecerlo basta hacer notar que las condiciones

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - y\| = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} |x_n - y| = 0$$

son equivalentes.

Como para todo par de puntos x e y tenemos que $\|x - y\| \leq 1$, el espacio X^* está acotado; concretamente, es $\delta(X^*) \leq 1$.

Nota 2. Cuando en el Capítulo 9.3, consideramos el espacio

$$X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_m \times \ldots$$

supusimos que los espacios X_m estaban uniformemente acotados. Haciendo uso del teorema que acabamos de demostrar podemos omitir esta hipótesis, sin más que definir la distancia entre dos puntos

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots) \quad \text{e} \quad y = (y_1, y_2, \ldots, y_m, \ldots)$$

por la fórmula

$$|x - y| = \sum_{m=1}^{\infty} (1/2^m)\|x_m - y_m\|.$$

El Teorema 2 del Capítulo 10.3, se verifica también sin necesidad de la hipótesis de la acotación.

12.5. Sucesiones de funciones. Convergencia uniforme

Sea $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ una sucesión de funciones definida en el espacio X, con valores en el espacio Y. Como en Análisis, decimos que esta sucesión es *uniformemente convergente* hacia el límite f si para todo $\varepsilon > 0$ existe un k tal que para todo $n \geq k$ y para todo $x \in X$ se verifica la desigualdad

(21) $$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

es decir, si

$$\bigwedge_\varepsilon \bigvee_k \bigwedge_x \bigwedge_n [(n \geq k) \Rightarrow (|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)].$$

Demostraremos a continuación un teorema que es una generalización del conocido del Análisis.

Teorema 1. *El límite de una sucesión de funciones continuas uniformemente convergente es una función continua.*

Supongamos que $f_1, f_2, \ldots$ es una sucesión de funciones continuas definidas en el espacio métrico X y con valores en el espacio Y. Sea

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x).$$

Consideremos un $\varepsilon > 0$ y un punto $x_0 \in X$. Existirá un k tal que para todo $x \in X$ se verifique la desigualdad

(22) $$|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Como la función f_k es continua en el punto x_0, existe un $\delta > 0$ tal que

(23) $$|f_k(x) - f_k(x_0)| < \varepsilon$$

para $|x - x_0| \lessdot \delta$. Por (22) tenemos que

(24) $$|f_k(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

De las desigualdades (22), (23) y (24) deducimos que la condición $|x - x_0| < \delta$ implica la $|f(x) - f(x_0)| < 3\varepsilon$.

Luego, la función f es continua en el punto x_0.

12.6. Continuidad de funciones en productos cartesianos. Funciones de varias variables

Consideremos $w = f(x, y)$, con $x \in X$, $y \in Y$ y $w \in W$. La función f es una función de las dos variables x e y. No obstante, esta función se puede considerar como una función de una variable, siendo esta variable $z = \langle x, y \rangle$, con dominio el producto cartesiano $X \times Y = Z$.

Por la definición de continuidad, la función f es continua en el punto $z_0 = \langle x_0, y_0 \rangle$ si

(i) $$(\lim_{n \to \infty} z_n = z_0) \Rightarrow [\lim_{n \to \infty} f(z_n) = f(z_0)].$$

Como la igualdad $\lim_{n \to \infty} z_n = z_0$ es equivalente a la conjunción $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$ y $\lim_{n \to \infty} y_n = y_0$ (cfr. Cap. 10.3, Teorema 1), la condición (i) de continuidad de una función puede formularse como sigue:

(ii) $$(\lim_{n \to \infty} x_n = x_0) \wedge (\lim_{n \to \infty} y_n = y_0) \Rightarrow [\lim_{n \to \infty} f(x_n, y_n) = f(x_0, y_0)].$$

Notas similares pueden hacerse para funciones de tres variables, o, más generalmente, de cualquier número finito de variables. También se pueden extender a funciones de un número infinito de variables. Así, se verifica el siguiente teorema:

Teorema 1. *Sea* $y = f(x)$, *con* $x \in X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_m \times \ldots$, *es decir,* $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots)$ *y* $x_m \in X_m$. *Una condición necesaria y suficiente para que la función f sea continua en el punto* $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots)$ *es que el sistema de igualdades*

$$\lim_{n\to\infty} x_m^n = x_m^0 \qquad \text{con} \qquad m = 1, 2, \ldots,$$

implique la igualdad

$$\lim_{n\to\infty} f(x^n) = f(x^0), \qquad \text{con} \qquad x^n = (x_1^n, x_2^n, \ldots).$$

La demostración de este teorema —al igual que en el caso de dos variables— se obtiene fácilmente a partir del Teorema 2 del Capítulo 10.3 (véase también apartado 4, nota 2).

A continuación, consideraremos funciones cuyos valores (y no sus argumentos, como antes) pertenecen a un producto cartesiano.

Supongamos que la función f está definida en el espacio T y su recorrido pertenece al producto cartesiano $X \times Y$ de los espacios X e Y. Como $f(t) \in X \times Y$ para todo $t \in T$, tenemos que $f(t) = \langle x(t), y(t) \rangle$ con $x(t) \in X$, $y(t) \in Y$. Las funciones x e y transforman el espacio T en subespacios de X e Y respectivamente.

En el caso particular de que X e Y representen el espacio de los números reales, f es una función de variable compleja.

Teorema 2. *Una condición necesaria y suficiente para que la función f sea continua es que las funciones x e y sean continuas.*

Demostración. Supongamos que las funciones x e y son continuas. Sea

(25) $$\lim_{n\to\infty} t_n = t;$$

entonces

(26) $$\lim_{n\to\infty} x(t_n) = x(t) \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} y(t_n) = y(t)$$

y, por tanto, por el Teorema 1 del Capítulo 10.3 tenemos

(27) $$\lim_{n\to\infty} \langle x(t_n), y(t_n) \rangle = \langle x(t), y(t) \rangle,$$

o sea,

$$(28)\qquad \lim_{n\to\infty} f(t_n) = f(t),$$

y por lo tanto, la función f es continua.

Por otra parte, si f es continua entonces la condición (25) implica la (28), o sea (27), con lo que se verifica la igualdad (26). Por tanto, las funciones x e y son continuas también.

Sea ahora f una función definida en el espacio T con recorrido en el espacio $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_m \times \ldots$ Podemos representar la función f del modo siguiente:

$$f(t) = [x_1(t), x_2(t), \ldots, x_m(t)],$$

en donde x_m es una aplicación de T en X_m.

Teorema 3. *Una condición necesaria y suficiente para que la función f sea continua es que las funciones x_m sean continuas para $m = 1, 2, \ldots$.*

Demostración. Supongamos que las funciones x_m son continuas. Entonces la igualdad (25) implica

$$(29)\qquad \lim_{n\to\infty} x_m(t_n) = x_m(t) \qquad \text{para} \qquad m = 1, 2, \ldots,$$

por lo que (cfr. Capítulo 10.3, Teorema 2):

$$(30)\qquad \lim_{n\to\infty} (x_1(t_n), x_2(t_n), \ldots) = (x_1(t), x_2(t), \ldots),$$

o sea

$$(31)\qquad \lim_{n\to\infty} f(t_n) = f(t).$$

De esto deducimos que la función f es continua.

Por otra parte, se deduce — suponiendo que la función f es continua — que la condición (25) implica la (31), esto es, la (30). Esto significa que se satisface la condición (29), y por tanto, que las funciones x_m $(m = 1, 2, \ldots)$ son continuas.

Continuidad de la función $|x - y|$. La distancia $x - y$ entre dos puntos x e y de un espacio métrico X es una función de dos variables (con valores reales no negativos); por tanto podemos considerarla como una función definida en el producto $X \times Y$.

Teorema 4. *La función $|x - y|$ es continua.*

Demostración. Sean

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x, \qquad \lim_{n\to\infty} y_n = y$$

y $\varepsilon > 0$. Existirá una k tal que para $n > k$ tendremos

$$(32)\qquad |x - x_n| < \varepsilon, \qquad |y_n - y| < \varepsilon.$$

De la desigualdad triangular obtenemos (véase fig. 5):

(33) $$|x-y| \leq |x-x_n| + |x_n-y_n| + |y_n-y|.$$

De las desigualdades (32) y (33) se sigue que

(34) $$|x-y| < |x_n-y_n| + 2\varepsilon.$$

De forma análoga, de la desigualdad

$$|x_n-y_n| \leq |x_n-x| + |x-y| + |y_n-y|$$



FIG. 5

obtenemos la desigualdad

(35) $$|x_n-y_n| < |x-y| + 2\varepsilon.$$

De las desigualdades (34) y (35) resulta para $n > k$,

$$||x_n-y_n| - |x-y|| < 2\varepsilon.$$

Esto significa que $\lim_{n\to\infty} |x_n-y_n| = |x-y|$, por lo que la función $|x-y|$ es continua.

12.7. Distancia entre un punto y un conjunto

La distancia entre un punto x y un conjunto no vacío A es, por definición, el número

(36) $$\varrho(x, A) = \text{cota inferior máxima de } \{|x-a|\}, \quad \text{con} \quad a \in A.$$

Suponemos, además, que $\varrho(x, \emptyset) = 1$. Señalemos que:

Teorema 1. *Si* $A = \{y\}$, *entonces* $\varrho(x, A) = |x-y|$.

Teorema 2. *Si* $\emptyset \neq A \subset B$, *entonces* $\varrho(x, B) \leq \varrho(x, A)$.

Teorema 3. $[\varrho(x, A) = 0] \equiv (x \in \bar{A})$.

En efecto, si $x \in \bar{A}$, entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe un punto $a \in A$ tal que $|x-a| < \varepsilon$. Esto significa que $\varrho(x, A) = 0$.

Recíprocamente, si $\varrho(x, A) = 0$, entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe un punto $a \in A$ tal que $|x - a| < \varepsilon$, y, por tanto, $x \in \bar{A}$.

De esto se sigue que

Teorema 4. *Si A es un conjunto cerrado,*

$$[\varrho(x, A) = 0] \equiv (x \in A).$$

Teorema 5. *La función $\varrho(x, A)$ es continua (para un A fijo).*

Demostración. Si el conjunto A es vacío el teorema es trivial. Por lo tanto, podemos suponer que $A \neq \emptyset$. Sea $\delta > 0$ y sea

(37) $$|x - x'| < \delta.$$

En virtud de (36) existe un punto $a \in A$ (véase fig. 6) tal que

(38) $$|x - a| \leqslant \varrho(x, A) + \delta.$$

De (37) y (38) se sigue que

(39) $$\varrho(x', A) \leqslant |x' - a| \leqslant |x - a| + |x - x'| < \varrho(x, A) + \delta + \delta.$$

Análogamente tenemos

(40) $$\varrho(x, A) < \varrho(x', A) + 2\delta.$$

Las desigualdades (39) y (40) conducen a

(41) $$|\varrho(x, A) - \varrho(x', A)| < 2\delta.$$

Esto significa que la desigualdad (37) implica la desigualdad (41). Luego la función $\varrho(x, A)$ es continua.

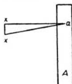


Fig. 6

Teorema 6. *Para cada par de conjuntos disjuntos A y B, existe un par de conjuntos abiertos G y H tales que*

(42) $$A \subset G \quad \text{y} \quad B \subset H.$$

(La propiedad del espacio que expresa este teorema se denomina *normalidad* del espacio).

Demostración. Sean

$$G = \mathrm{E}_x[\varrho(x, A) < \varrho(x, B)], \qquad H = \mathrm{E}_x[\varrho(x, B) < \varrho(x, A)].$$

Los conjuntos G y H son abiertos. En efecto, en virtud de la continuidad de las funciones $\varrho(x, A)$ y $\varrho(x, B)$, la función $f(x) = \varrho(x, B) - \varrho(x, A)$, es también continua. Como

$$G = \mathbf{E}_x[\varrho(x, B) - \varrho(x, A) > 0],$$

el conjunto G es abierto (cfr. Corolario 2, apartado 2). Análogamente, el conjunto H es también abierto.

La demostración de la igualdad $G \cap H = \emptyset$ es inmediata.

Por último, se verifica la fórmula (42), pues si $x \in A$, en virtud del Teorema 4 tenemos que $\varrho(x, A) = 0$, pero $\varrho(x, B) \neq 0$, ya que x no pertenece a B (ya que $A \cap B = \emptyset$). Por lo tanto, $\varrho(x, A) < \varrho(x, B)$, de lo que se sigue que $x \in G$.

Esto significa que $A \subset G$. Análogamente, $B \subset H$.

***Teorema 7.** *Todo conjunto cerrado es un conjunto G_δ.*

Demostración. Sea $F = \bar{F}$. Hagamos

$$K(F, \varepsilon) = \mathbf{E}_x[\varrho(x, F) < \varepsilon].$$

Dada la continuidad de la función $\varrho(x, F)$ el conjunto $K(F, \varepsilon)$ es abierto (cfr. Corolario 2, apartado 2). Vamos a mostrar que

$$F = \bigcap_{n=1}^{\infty} K(F, 1/n).$$

En efecto, si $x \in F$, entonces $\varrho(x, F) = 0$, por lo que $x \in K(F, 1/n)$.

Recíprocamente, si $x \notin F$, entonces, en virtud del Teorema 4, $\varrho(x, F) > 0$, por lo que existe un n tal que $\varrho(x, F) > 1/n$; por lo tanto $x \notin K(F, 1/n)$.

Notas. Del Teorema 7 se sigue inmediatamente que todo conjunto abierto es un conjunto F_σ (y por lo tanto que todo conjunto G_δ es un conjunto $F_{\sigma\delta}$). También se sigue que la condición (a) en la definición de los conjuntos de Borel puede ser substituida por:

(a′) *todo conjunto abierto pertenece a* $\mathbf{R}$.

12.8. Extensión de las funciones continuas. Teorema de Tietze*

Lema 1. *Para todo par de conjuntos cerrados disjuntos A y B en el espacio métrico X, existe una función f real y continua definida en todo el espacio X que satisface las condiciones siguientes:*

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{para } x \in A, \\ 1 & \text{para } x \in B, \end{cases} \tag{43}$$

$$-1 < f(x) < 1 \quad \text{para} \quad x \notin A \cup B. \tag{44}$$

(*) Haremos uso del Teorema de Tietze en el último capítulo.

Es fácil de demostrar, utilizando los Teoremas 3-5, apartado 7, que la función f definida por la fórmula

$$f(x) = \{\varrho(x, A) - \varrho(x, B)\}/\{\varrho(x, A) + \varrho(x, B)\}$$

satisface las condiciones impuestas en el lema.

LEMA 2. *Si f es una función real continua definida en un subconjunto cerrado del espacio métrico X tal que $|f(x)| \leq \mu$ ($\neq 0$), existe una función continua g definida en todo el espacio X que satisface las siguientes condiciones:*

(45) $$|g(x)| \leq (1/3)\mu \quad \text{para todo} \quad x \in X,$$

(46) $$|g(x)| < (1/3)\mu \quad \text{para todo} \quad x \in X - F,$$

(47) $$|f(x) - g(x)| \leq (2/3)\mu \quad \text{para todo} \quad x \in F.$$

DEMOSTRACIÓN. Sean

$$A = \mathbf{E}_x[f(x) \leq (-1/3)\mu] \quad \text{y} \quad B = \mathbf{E}_x[f(x) \geq (1/3)\mu].$$

Los conjuntos A y B son disjuntos y cerrados (véase Corolario 2 apartado 2). La función

(48) $$g(x) = (1/3)\mu\{\varrho(x, A) - \varrho(x, B)\}/\{\varrho(x, A) + \varrho(x, B)\}$$

satisface las condiciones requeridas, en virtud del Lema 1.

Teorema de extensión de Tietze. *Toda función real continua definida en un subconjunto cerrado F del espacio métrico X puede ser extendida a todo el espacio X; es decir, existe una función real f^* definida en todo el espacio X tal que*

(49) $$f^*(x) = f(x) \quad \text{para} \quad x \in F.$$

Además, si f está acotada:

(50) $$|f(x)| \leq \mu (\neq 0), \quad \text{para todo} \quad x \in F,$$

entonces

(51) $$|f^*(x)| < \mu \quad \text{para} \quad x \in X - F.$$

DEMOSTRACIÓN. Consideremos primero el caso en que la función esté acotada y, por tanto, satisfaga la desigualdad (50). Definimos una sucesión de funciones continuas $g_0, g_1, \ldots,$ inductivamente. Hacemos $g_0(x) = 0$ para todo $x \in X$. Para un $n > 0$ dado supongamos que las funciones $g_0(x), \ldots, g_n(x)$ satisfacen la desigualdad

(52) $$\left|f(x) - \sum_{i=0}^{n} g_i(x)\right| \leq (2/3)^n\mu \quad \text{para} \quad x \in F.$$

En el caso $n = 0$ esta desigualdad se reduce a la (50).

Substituyendo en las hipótesis del Lema 2: $f(x)$ por $f(x) - \sum_{i=0}^{n} g_i(x)$ y μ por $(2/3)^n\mu$, obtenemos una función continua g_{n+1} definida en el espacio X que satisface las condiciones siguientes:

(53) $$|g_{n+1}(x)| \leq (2^n/3^{n+1})\mu \quad \text{para} \quad x \in X,$$

(54) $$|g_{n+1}(x)| < (2^n/3^{n+1})\mu \quad \text{para} \quad x \in X - F,$$

(55) $$\left| f(x) - \sum_{i=0}^{n+1} g_i(x) \right| \leq (2/3)^{n+1}\mu \quad \text{para} \quad x \in F.$$

Luego las funciones continuas g_n están definidas para todo $n = 0, 1, 2, \ldots$ Para todo $x \in X$ hagamos

(56) $$f^*(x) = \sum_{i=0}^{\infty} g_i(x).$$

De las desigualdades (52)-(54) se sigue que la serie (56) es uniformemente convergente en el espacio X; y por tanto, en virtud del Teorema 1, apartado 5, la función f es continua.

Además, la condición (52) implica la condición (49), y, a causa de la desigualdad (54), tenemos para $x \in X - F$,

$$|f^*(x)| = \left| \sum_{i=0}^{\infty} g_i(x) \right| \leq \sum_{i=0}^{\infty} |g_{i+1}(x)| < \mu \sum_{i=0}^{\infty} (2^i/3^{i+1}) = \mu,$$

por lo que se satisface también la desigualdad (51).

Por tanto, hemos demostrado el teorema para el caso en que la función f esté acotada.

Si f no está acotada, aplicamos en primer lugar un homeomorfismo h que transforme el espacio de todos los números reales en el intervalo abierto $-1 < y < 1$, por ejemplo $h(x) = (2/\pi)$ arc. tg x. La función hf (compuesta de f y h) es continua y acotada; por lo tanto, existe en virtud de la parte del teorema que acabamos de demostrar una función continua h^* definida en el espacio X tal que

$$h^*(x) = hf(x) \quad \text{para} \quad x \in F, \qquad |h^*(x)| < 1 \quad \text{para} \quad x \in X.$$

Hagamos ahora

$$f^*(x) = h^{-1}h^*(x)$$

para todo $x \in X$. La función f^* es continua y para todo $x \in F$ tenemos

$$f^*(x) = h^{-1}hf(x) = f(x).$$

Así, el teorema ha sido demostrado con toda generalidad.

Corolario 1. *Toda función continua definida en un subconjunto cerrado F de un espacio métrico X con recorrido perteneciente a uno de los espacios* $\mathcal{E}^n$, $\mathcal{I}^n$, $\mathcal{E} \times \mathcal{E} \times \ldots$, $\mathcal{H}$, *puede extenderse a todo el espacio* X.

Vamos a demostrar este corolario, v. gr. para el cubo de Hilbert $\mathcal{H} = \mathcal{I} \times \mathcal{I} \times \ldots$ La demostración en los demás casos es análoga.

Para todo $x \in F$ tenemos $f(x) \in \mathcal{I} \times \mathcal{I} \times \ldots$, y por tanto

$$f(x) = [f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots],$$

en donde $f_n(x)$ es la coordenada n-ésima del punto $f(x)$ en el cubo de Hilbert y, por lo tanto, una función continua real. Extendiendo cada una de las funciones f_n a una función continua f_n^* definidas en todo el espacio X, obtenemos una función

$$f^*(x) = [f_1^*(x), f_2^*(x), \ldots, f_n^*(x), \ldots]$$

que es la extensión de la función f (véase Teorema 3, apartado 6).

Corolario 2. *Toda función continua f definida en un subconjunto cerrado F de un espacio métrico X con recorrido perteneciente a la esfera* $\mathcal{S}_n$ *(o sea al conjunto de puntos* $x_1^2 + \ldots + x_{n+1}^2 = 1$ *del espacio* $\mathcal{E}^{n+1}$*) puede extenderse a un entorno del conjunto F (con respecto al espacio X).*

Demostración. En virtud del Corolario 1 existe una extensión $f^* \in (\mathcal{E}^{n+1})^X$ de la función f. Hagamos

$$G = \mathbf{E}_x[f^*(x) \neq 0].$$

Por la continuidad de la función f^*, G es un conjunto abierto que contiene al conjunto F (ya que $|f^*(x)| = |f(x)| = 1$ para $x \in F$). Entonces la función

$$g(x) = f^*(x)/|f^*(x)|$$

es la extensión buscada de la función f al conjunto G que toma valores pertenecientes a $\mathcal{S}_n$.

Nota. Los espacios que dan validez al enunciado del Corolario 1, como $\mathcal{E}^n$, $\mathcal{I}^n$, etc., se denominan *retractos (absolutos)*. Del mismo modo, los que pueden sustituir a $\mathcal{S}_n$ en el enunciado del Corolario 2 se llaman *entornos retractos*. (Estos conceptos fueron introducidos por K. Borsuk).

Esta terminología está relacionada con la idea de retracción. Así, decimos que un subconjunto R del espacio X es un retracto de este espacio si existe una aplicación continua f del espacio X en el conjunto R tal que $f(x) = x$ para todo $x \in R$; esta aplicación se denomina *retracción* (la proyección es un ejemplo de retracción).

Entonces, un retracto absoluto es, como se puede probar fácilmente, retracto de todo espacio que lo contenga y en el cual él sea cerrado. Un

entorno retracto no es un retracto de todo el espacio, sino de alguno de sus entornos en este espacio.

Estos conceptos son importantes generalizaciones de conceptos análogos de la geometría clásica n-dimensional: el cubo n-dimensional es un retracto absoluto; todo poliedro n-dimensional es (como se puede demostrar) un entorno retracto.

EJERCICIOS

1. Demostrar que una condición necesaria y suficiente para que la función f definida en el espacio X y con recorrido en el espacio Y sea continua en el punto $x \in X$ es que para todo conjunto $B \subset Y$ la condición $f(x) \in \mathrm{Int}(B)$ implique la condición $x \in \mathrm{Int}(f^{-1}(B))$; y lo mismo, que es necesario y suficiente que se verifique la implicación $[x \in \overline{f^{-1}(B)}] \Rightarrow [f(x) \in \overline{B}]$ para todo conjunto $B \subset Y$.

Sugerencia: Utilícese el Teorema 1, apartado 2.

2. Demostrar: una condición necesaria y suficiente para que la función f sea continua es que todo conjunto $A \subset X$ satisfaga la inclusión $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$; y también: es necesario y suficiente que todo conjunto $B \subset Y$ satisfaga la inclusión $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B})$.

3. Demostrar que la composición de dos funciones continuas es una función continua.

4. Sean los conjuntos A y B ambos abiertos o ambos cerrados, y sea f una función continua definida en el conjunto $A \cup B$. Demostrar que si la función f es continua en el conjunto A y en el conjunto B lo es también en el conjunto $A \cup B$.

5. Sea f una función definida en el espacio X. Si el espacio X es una unión de conjuntos abiertos G_t, y si la función f es continua en cada uno de ellos individualmente, la función f será entonces continua en todo el espacio X.

6. Sea f una función definida en el espacio X. Si $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, en donde $A_n \subset \mathrm{Int}(A_{n+1})$ y si la función f es continua en cada uno de los A_n, entonces es continua en todo el espacio X.

7. Demostrar: una condición necesaria y suficiente para que la función uno-uno sea un homeomorfismo, es que la condición $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$ se satisfaga para un conjunto arbitrario A; similarmente: es necesario y suficiente que la condición $f^{-1}(\overline{B}) = \overline{f^{-1}(B)}$ se satisfaga para un conjunto arbitrario B.

Sugerencia: Utilizar el Ejercicio 2.

8. Si la función f definida en el espacio X es continua, entonces el conjunto $\mathbf{E}_{x,y}[y = f(x)]$ es homeomorfo a X.

9. El conjunto de todas las sucesiones de números naturales forman un espacio métrico (el llamado *espacio de Baire*), si tomamos como distancia entre dos sucesiones distintas $x = (m_1, m_2, \ldots)$ e $y = (n_1, n_2, \ldots)$ al número $1/r$, en donde r es el menor índice tal que $m_r \neq n_r$. Mostrar que este espacio es homeomorfo al conjunto de los números irracionales del intervalo $[0, 1]$.

Sugerencia: Asignar la fracción continua

$$f(x) = \frac{1|}{|m_1} + \frac{1|}{|m_2} + \dots$$

a la sucesión de números naturales $x = (m_1, m_2, \dots)$.

10. Una condición necesaria y suficiente para que el límite $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ de la sucesión de funciones continuas $f_1, f_2, \dots$ definidas en el espacio X sea una función continua es que, el espacio X para todo $\varepsilon > 0$, sea representable como la unión de conjuntos abiertos $A_n(\varepsilon)$, en donde

$$A_n(\varepsilon) = \mathbf{E}_x\{|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\}.$$

Sugerencia: Para mostrar la continuidad de la función f bajo la hipótesis de nuestra condición en un punto arbitrario $x_0 \in X$, encontremos un índice n_0 tal que $x_0 \in A_{n_0}(\varepsilon/3)$. Después, haremos uso del hecho de que el conjunto $A_{n_0}(\varepsilon/3)$ es abierto y de que la función f_{n_0} es continua.

11. Introduciendo una «nueva» distancia en el espacio métrico X con ayuda de la fórmula

$$\varphi(x, y) = |x - y|/\{1 + |x - y|\},$$

hemos definido una transformación homeomorfa de X en X.

Deducir de esto que el conjunto de todas las sucesiones con términos reales $x = (x_1, x_2, \dots, x_m, \dots)$ es un espacio métrico bajo la siguiente definición de distancia:

$$|x - y| = \sum_{m=1}^{\infty} (1/2^m)|x_m - y_m|/\{1 + |x_m - y_m|\}$$

(este es el llamado *espacio de Fréchet*).

12. Sea F un subconjunto cerrado del espacio X, y sea

$$f(x) = 1/\varrho(x, F) \qquad \text{para} \qquad x \in X - F.$$

Demostrar que el conjunto

$$\mathbf{E}_{x,y}[y = f(x)] \wedge (x \notin F)$$

es cerrado en el espacio $X \times \mathcal{E}$.

Deducir de esto que todo conjunto abierto en X es homeomorfo a un subconjunto cerrado del espacio $X \times \mathcal{E}$ (utilizando el Ejercicio 8).

Generalizar este corolario a la diferencia de conjuntos cerrados.

13. Sea Q un subconjunto G_δ del espacio X, esto es,

$$Q = G_1 \cap G_2 \cap \dots \cap G_n \cap \dots,$$

en donde cada G_n es un conjunto abierto. Sea

$$f_n(x) = 1/\varrho(x, X - G_n) \quad \text{para} \quad x \in G_n \quad \text{y} \quad f(x) = [f_1(x), f_2(x), \dots].$$

Demostrar que el conjunto

$$\mathbf{E}_{x,y}[y = f(x)] \wedge (x \in Q)$$

es cerrado en el espacio $X \times \mathcal{E} \times \mathcal{E} \times \mathcal{E} \times \dots$

Deducir de esto que todo conjunto G_δ es homeomorfo a un subconjunto cerrado del espacio $X \times \mathcal{E} \times \mathcal{E} \times \mathcal{E} \times \dots$

14. **R** designa una familia de subconjuntos acotados cerrados no vacíos de un espacio métrico X. Entendemos por *distancia de dos conjuntos* A, $B \in \mathbf{R}$ el mayor de los dos números:

$$\text{cota superior mínima}_{x \in A}\ \varrho(x, B); \quad \text{cota superior mínima}_{y \in B}\ \varrho(y, A).$$

Demostrar que la distancia definida de esta forma, que designamos por dist(A, B), metriza el conjunto **R** (esto es, satisface las condiciones (1)-(3) del Capítulo 9.1).

15. Mostrar que en el Teorema 6, apartado 7, es posible reemplazar la hipótesis de que los conjuntos A y B sean disjuntos y cerrados por otra más débil, concretamente, que $\overline{A} \cap B = \emptyset = A \cap \overline{B}$.

16. Demostrar que si $X = G \cup H$, siendo G y H conjuntos abiertos, existen conjuntos cerrados A y B tales que

$$X = A \cup B, \qquad A \subset G \quad \text{y} \quad B \subset H.$$

17. Para todo par de subconjuntos cerrados A y B del espacio X existe un par de conjuntos cerrados P y Q tales que

$$P \cup Q = X, \qquad P \cap (A \cup B) = A, \qquad Q \cap (A \cup B) = B.$$

Sugerencia: Considerar los conjuntos

$$\mathbf{E}_x[\varrho(x, A) \leqslant \varrho(x, B)] \quad \text{y} \quad \mathbf{E}_x[\varrho(x, B) \leqslant \varrho(x, A)].$$

18. Demostrar la siguiente generalización del Teorema 6, apartado 7: Para todo sistema finito de conjuntos cerrados $F_1, F_2, \ldots, F_n$ que satisfacen la igualdad $F_1 \cap F_2 \cap \ldots \cap F_n = \emptyset$ existe un sistema de conjuntos abiertos $G_1, G_2, \ldots, G_n$ tales que

$$G_1 \cap G_2 \cap \ldots \cap G_n = \emptyset \quad \text{y} \quad F_i \subset G_i \quad \text{para} \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Sugerencia: Considerar los conjuntos

$$H_{ij} = \mathbf{E}_x[\varrho(x, F_i) < \varrho(x, F_j)] \quad \text{y} \quad G_i = H_{i1} \cup H_{i2} \cup \ldots \cup H_{in}.$$

Para demostrar que $G_1 \cap G_2 \cap \ldots \cap G_n = \emptyset$ consideramos para cada punto x el máximo de los números $\varrho(x, F_1) \ldots \varrho(x, F_n)$; si es el número $\varrho(x, F_i)$ entonces $x \notin G_i$.

19. Deducir el siguiente corolario del teorema precedente: si los conjuntos abiertos $G_1, G_2, \ldots, G_n$ satisfacen la igualdad $X = G_1 \cup G_2 \cup \ldots \cup G_n$ existen conjuntos cerrados $F_1, F_2, \ldots, F_n$ que satisfacen las condiciones

$$F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_n = X \quad \text{y} \quad F_i \subset G_i \quad \text{para} \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

20. Mostrar que el cubo de Hilbert $\mathcal{H}$ es homeomorfo al subconjunto del espacio de Hilbert (cfr. Capítulo 9.1, Ejemplo 3) compuesto por los puntos $x = (x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots)$ tales que $0 \leqslant x_i \leqslant 1/i$.

21. Mostrar que el Lema 1 del apartado 8 se puede fortalecer como sigue: si $f(x) = -1$ entonces $x \in A$, si $f(x) = 1$ entonces $x \in B$.
Sugerencia: Utilizar el Teorema 7, apartado 7.

CAPÍTULO **13**

Espacios separables

13.1. Espacios separables

DEFINICIÓN: Se dice que un espacio es *separable* si contiene un subconjunto denso numerable.

Por tanto, un espacio es separable si contiene una sucesión de puntos $p_1, p_2, \ldots$, tal qte todo punto p es de la forma:

$$p = \lim_{n \to \infty} p_{k_n}.$$

El espacio de los números reales es un espacio separable, pues el conjunto de los números racionales es denso y numerable. Un ejemplo de espacio no separable es un conjunto arbitrario no numerable en el que $|x - y| = 1$ para todo par de puntos $x \neq y$.

Decimos que una sucesión de conjuntos abiertos no vacíos $G_1, G_2, \ldots$, constituye una *base* del espacio si para todo punto p del espacio y para todo $\varepsilon > 0$ existe un n tal que

(1) $$p \in G_n \quad \text{y} \quad \delta(G_n) < \varepsilon.$$

En el espacio de todos los números reales forman una base los intervalos abiertos $r < x < s$ con extremos racionales r y s. El conjunto de estos intervalos abiertos es numerable, y para todo número real x y para todo $\varepsilon > 0$, existen racionales r y s tales que $r < x < s$ y $s - r < \varepsilon$.

Teorema 1. *Todo espacio métrico separable tiene una base. Recíprocamente, si un espacio tiene una base es separable.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $p_1, p_2, \ldots$, una sucesión densa en el espacio métrico. Consideremos los entornos esféricos de los puntos p_n con radios racionales:

$$K_{n,r} = \mathbf{E}_x(|x - p_n|) < r).$$

El conjunto de estos entornos es numerable (cfr. Teorema 3, Capítulo 5.3) y forma una base.

En efecto, para un punto p arbitrario y para todo número $\varepsilon > 0$ existe un punto p_n tal que $|p - p_n| < \varepsilon$. Sea r un número racional tal que $|p - p_n| < r < \varepsilon$. Entonces $p \in K_{n,r}$ y $\delta(K_{n,r}) < 2\varepsilon$, por lo que los conjuntos $K_{n,r}$ forman una base.

Para demostrar la segunda parte del teorema, se elige un punto p_n en cada G_n. El conjunto de estos puntos es numerable y denso en el espacio.

Teorema 2. *Si $G_1, G_2, \ldots$, es una base del espacio dado, entonces todo conjunto abierto H es la unión de un cierto número de conjuntos pertenecientes a dicha base.*

Demostración. Sea $p \in H$. Como H es abierto, existe un entorno esférico K de p tal que $K \subset H$. En virtud de nuestra hipótesis, existe un conjunto G_n tal que $p \in G_n$ y $\delta(G_n) < \frac{1}{2}\delta(K)$ por lo que $G_n \subset K$. Así, para todo punto $p \in H$, existe un subíndice $n(p)$ tal que $p \in G_{n(p)} \subset H$. Por lo tanto, H es la unión de los conjuntos $G_{n(p)}$ para todos los puntos $p \in H$.

Teorema 3 (Lindelöf). *En un espacio separable, toda familia de conjuntos abiertos H_t, en donde $t \in T$ (T es un conjunto arbitrario), contiene una sucesión $t_1, t_2, \ldots$ (finita o infinita) tal que*

$$\bigcup_n H_{t_n} = \bigcup_t H_t.$$

Con otras palabras: *todo recubrimiento no numerable constituido con conjuntos abiertos contiene un recubrimiento numerable.*

Demostración. Sea $G_1, G_2, \ldots$ una base del espacio. Sea $k_1, k_2, \ldots$ una sucesión consistente en números i tales que G_i está contenido en alguno de los conjuntos H_t. A cada k_n le corresponderá un cierto subíndice t_n tal que $G_{k_n} \subset H_{t_n}$. Por tanto tenemos que

(2) $$\bigcup_n G_{k_n} \subset \bigcup_n H_{t_n} \subset \bigcup_t H_t.$$

Queda por probar la inclusión

(3) $$\bigcup_t H_t \subset \bigcup_n H_{t_n}.$$

Sea $p \in H_t$. Como la sucesión $G_1, G_2, \ldots$ forma una base, existe un i tal que $p \in G_i \subset H_t$. Por lo tanto, el número i pertenece a la sucesión $k_1, k_2, \ldots$, de donde

$$p \in \bigcup_n G_{k_n}, \quad \text{por lo que,} \quad p \in \bigcup_n H_{t_n}$$

en virtud de (2). Queda así demostrada la inclusión (3).

13.2. Propiedades de los espacios separables

Teorema 1. *Todo subconjunto Z de un espacio métrico separable X es un espacio métrico separable.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $G_1, G_2, \ldots$ una base del espacio X. Se ve fácilmente que la sucesión de subconjuntos no vacíos $H_n = Z \cap G_n$ es una base de Z.

Teorema 2. *El producto cartesiano de dos o más (en número finito) espacios separables es un espacio separable.*

DEMOSTRACIÓN. Si los espacios X e Y son separables, y $P = (p_1, p_2, \ldots)$ es denso en X, y $Q = (q_1, q_2, \ldots)$ es denso en Y, el conjunto

(4) $$P \times Q = (\langle p_1, q_1\rangle, \langle p_1, q_2\rangle, \langle p_2, q_1\rangle, \langle p_2, q_2\rangle \ldots \langle p_i, q_j\rangle, \ldots)$$

es denso en el espacio $X \times Y$ ya que, si $\langle p, q\rangle \in X \times Y$, entonces p y q son de la forma

(5) $$p = \lim_{n\to\infty} p_{k_n} \quad \text{y} \quad q = \lim_{n\to\infty} q_{r_n},$$

de donde

$$\langle p, q\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle p_{k_n}, q_{r_n}\rangle,$$

o sea, el punto $\langle p, q\rangle$, es el límite de una sucesión de puntos pertenecientes a la sucesión (4).

La generalización de la demostración a un número finito de conjuntos es inmediata.

Teorema 3. *Si los espacios $X_1, X_2, \ldots$ son separables, entonces el espacio $X_1 \times X_2 \times \ldots$ es también separable. En particular, el cubo de Hilbert $\mathcal{H}$ es separable.*

DEMOSTRACIÓN. Designamos por R_m un conjunto numerable denso en el espacio X_m (por ejemplo, R_m puede ser el conjunto de los números racionales en el intervalo cerrado $\mathcal{I} = [0, 1]$ si $X_m = \mathcal{I}$). Sea a_m un punto fijo del conjunto R_m (por ejemplo, $a_m = 0$, si $X = \mathcal{I}$). Consideremos el conjunto Q de todas las sucesiones $(p_1, p_2, \ldots)$ tales que

1. $p_m \in R_m$ para todo m,
2. $p_m = a_m$ para un m suficientemente grande.

Toda sucesión perteneciente al conjunto Q es un punto del espacio $X_1 \times X_2 \times \ldots$ Evidentemente, Q es numerable (cfr. Teorema 5, Capítulo 5.3). Vamos a demostrar que el conjunto Q es denso.

Sea $x = (x_1, x_2, \ldots) \in X_1 \times X_2 \times \ldots$ Como $\overline{R}_m = X_m$, tenemos que para todo m

(6) $$x_m = \lim_{n\to\infty} r_m^n,$$

en donde $r_m^n \in R_m$. Consideremos la sucesión de puntos pertenecientes a Q:

$$p^1 = (r_1^1, a_2, a_3, a_4, \ldots),$$
$$p^2 = (r_1^2, r_2^2, a_3, a_4, \ldots),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$p^n = (r_1^n, r_2^n, \ldots, r_n^n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

En virtud de (6) tenemos que $x = \lim_{n\to\infty} p^n$, que era lo que teníamos que demostrar.

13.3. Teoremas sobre potencias en espacios separables

Teorema 1. *Todo espacio separable tiene potencia* $\leqslant \mathfrak{c}$.

Demostración. Sea $p_1, p_2, \ldots,$ una sucesión densa en el espacio. A todo punto x le corresponde una sucesión de números naturales $k_1, k_2, \ldots$ tales que $x = \lim_{n\to\infty} p_{k_n}$. Por tanto, hay a lo sumo tantos puntos en el espacio como sucesiones infinitas de números naturales, o sea, a lo sumo $\mathfrak{c}$ (cfr. Capítulo 6.4 (42)).

Teorema 2. *El número de conjuntos abiertos en un espacio separable es a lo sumo* $\mathfrak{c}$.

Lo mismo vale para *conjuntos cerrados.*

Demostración. Sea $G_1, G_2, \ldots$ una base del espacio. En virtud del Teorema 2, apartado 1, a todo conjunto abierto H le corresponde una sucesión de números naturales $k_1, k_2, \ldots$ tal que

$$H = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_{k_n}.$$

Se sigue de esto que el número de conjuntos abiertos es a lo sumo el de todas las sucesiones de números naturales, o sea, a lo sumo $\mathfrak{c}$.

La segunda parte del teorema se sigue inmediatamente de la primera, pues, si asignamos a todo conjunto abierto su complementario, entonces transformamos la familia de conjuntos abiertos en la de cerrados de forma biunívoca.

**Nota.* Con mayor generalidad, podemos demostrar que la familia de todos los subconjuntos de Borel de un espacio separable tiene potencia $\leqslant \mathfrak{c}$. Por tanto, todo espacio separable de potencia $\mathfrak{c}$, contiene conjuntos que no son de Borel; y además, como la familia de todos los subconjuntos de este espacio tiene potencia $2^{\mathfrak{c}}$, la familia de subconjuntos que no son de

Borel tiene potencia $> \mathfrak{c}$ (y por tanto, en la recta real, por ejemplo, existen más conjuntos que no son de Borel que conjuntos de Borel).

Teorema 3. *Toda familia* $\mathbf{R}$ *de subconjuntos abiertos disjuntos de un espacio separable es numerable.*

Demostración. Sea $p_1, p_2, \ldots$, una sucesión densa en el espacio considerado. Por tanto, si H es un conjunto no vacío perteneciente a la familia $\mathbf{R}$, existirá un índice n tal que $p_n \in H$; designamos este índice por $n(H)$; si $\emptyset \in \mathbf{R}$ ponemos $n(\emptyset) = 0$. De esta forma hemos asignado a todo conjunto no vacío H perteneciente a $\mathbf{R}$ un número $n(H)$ tal que

(7) $$p_{n(H)} \in H.$$

A conjuntos distintos corresponden números distintos, ya que si $n(H_1) = n(H_2)$, en virtud de (7) tenemos

$$p_{n(H_1)} \in H_1 \cap H_2,$$

que es posible siempre y cuando $H_1 = H_2$ (dado que los conjuntos pertenecientes a la familia $\mathbf{R}$ son disjuntos).

Por tanto, hay a lo sumo tantos elementos de la familia $\mathbf{R}$ como enteros no negativos, que era lo que teníamos que demostrar.

Teorema 4. *El conjunto de puntos aislados de un espacio separable es numerable.*

Demostración. Como todo punto aislado del espacio constituye un conjunto abierto del espacio (véase Capítulo 11.1), los conjuntos de un elemento cuyo único elemento sea un punto aislado, forman una familia de conjuntos abiertos disjuntos. Esta familia es numerable en virtud del Teorema 3, y, por tanto, el conjunto de puntos aislados es también numerable.

Corolario. *Sea Z un subconjunto de un espacio separable. Entonces el conjunto de puntos aislados de Z es numerable.*

En efecto, el conjunto Z, por ser un subconjunto de un espacio separable, puede considerarse por sí mismo como un espacio separable (en virtud del Teorema 1, apartado 2).

Teorema 5. *Si los espacios X e Y son separables, el espacio Y^X (es decir, el conjunto de las funciones continuas que aplican el espacio X sobre subconjuntos del espacio Y) tiene potencia $\leqslant \mathfrak{c}$.*

Demostración. En virtud del Teorema 2, Capítulo 12.2, si $f \in Y^X$ será f un conjunto cerrado en el espacio $X \times Y$; pero como este último espacio es separable (Teorema 2, apartado 2) la familia de todos sus subconjuntos cerrados tiene potencia $\leqslant \mathfrak{c}$ (Teorema 2).

Nota. Si el espacio Y tiene potencia $\mathfrak{c}$, entonces el espacio Y^X tiene la misma potencia, pues el conjunto de funciones constantes tiene potencia $\mathfrak{c}$. Bajo la hipótesis de que el espacio X tiene también potencia $\mathfrak{c}$, hacemos notar que hay más funciones discontinuas que continuas ya que el conjunto de todas las funciones que transforman X en subconjuntos de Y tiene potencia $\mathfrak{c}^{\mathfrak{c}} > \mathfrak{c}$ (cfr. Cap. 6.4 (45)).

13.4. Teorema de Urysohn. *Todo espacio métrico separable X es homeomorfo a un subconjunto del cubo de Hilbert $\mathcal{H}$.*

Escribiremos esto simbólicamente como sigue:

$$X \underset{\text{top}}{\subset} \mathcal{H}.$$

Demostración. Por el Teorema 5 del apartado 4, Capítulo 12, podemos suponer que

$$\delta(X) < 1.$$

Sea $p_1, p_2, \ldots$ una sucesión de puntos densa en el espacio X. A cada $x \in X$ asignamos el punto del cubo de Hilbert de «coordenadas» $|x - p_1|$, $|x - p_2|, \ldots$, es decir

(8) $$h(x) = (|x - p_1|, |x - p_2|, \ldots, |x - p_n|, \ldots).$$

Las funciones

(9) $$h_n(x) = |x - p_n|$$

son continuas (Cap. 12.6, Teorema 4) y, por tanto, por el Teorema 3, Capítulo 12.6, la función h es también continua. Vamos a demostrar que esta función es un homeomorfismo.

Suponemos que

(10) $$\lim_{k\to\infty} h(x_k) = h(x)$$

y debemos demostrar que

(11) $$\lim_{k\to\infty} x_k = x.$$

Sea $\varepsilon > 0$. Como la sucesión $p_1, p_2 \ldots$, es densa en el espacio X, existe un punto p_j, tal que

(12) $$|x - p_j| < \varepsilon.$$

De (10) y (8) se sigue que

$$\lim_{k\to\infty} h_j(x_k) = h_j(x).$$

Por (9) esto significa que

$$\lim_{k\to\infty} |x_k - p_j| = |x - p_j|;$$

por lo tanto existe un k_0 tal que

(13) $$|x_k - p_j| < |x - p_j| + \varepsilon$$

supuesto que $k > k_0$.

De las desigualdades (12) y (13) deducimos

$$|x - x_k| < |x - p_j| + |p_j - x_k| < 3\varepsilon \qquad \text{para} \qquad k > k_0.$$

Esto significa que (11) es válida.

Nota. Como todo subconjunto del cubo de Hilbert es un espacio métrico separable, del teorema anterior se sigue que *desde el punto de vista topológico los espacios métricos separables son equivalentes a subconjuntos del cubo de Hilbert.*

*13.5. Puntos de condensación. El teorema de Cantor-Bendixón

Se dice que un punto p de un conjunto A es un *punto de condensación* de A si todo contorno esférico de p contiene un conjunto no numerable de puntos del conjunto A.

Designaremos el conjunto de puntos de condensación de A por el símbolo A^0.

Todo punto de condensación de A es un punto de acumulación de A, es decir

(14) $$A^0 \subset A^d.$$

Es también fácil de demostrar que el conjunto A^0 es cerrado, es decir

(15) $$A^0 = \overline{A^0}$$

y que

(16) $$(A \cup B)^0 = A^0 \cup B^0.$$

Es válida la siguiente generalización del Teorema 4, apartado 3.

Teorema 1. *En un espacio separable el conjunto de puntos de un conjunto arbitrario A que no son puntos de condensación del conjunto, o sea, el conjunto $A - A^0$, es numerable.*

Demostración. Sea $G_1, G_2, \dots$ una base del espacio. Sea $p \in A - A^0$. Entonces, existe un entorno esférico K de p tal que $A \cap K$ es numerable. Al mismo tiempo, existe un índice $n(p)$, tal que $p \in G_{n(p)} \subset K$, de donde $A \cap G_{n(p)} \subset A \cap K$, y por tanto, el conjunto $A \cap G_{n(p)}$ es numerable.

Como toda unión numerable de conjuntos numerables es también un conjunto numerable (Cap. 5.3, Teorema 4), el conjunto

$$S = \bigcup_p A \cap G_{n(p)},$$

en donde $p = A - A^0$, es numerable. Ahora, $A - A^0 \subset S$, pues $p \in A \cap G_{n(p)}$. Por lo tanto $A - A^0$ es numerable.

Como un conjunto numerable, evidentemente, no tiene puntos de condensación, se sigue del teorema que

(17) $$(A - A^0)^0 = \emptyset.$$

De esto deducimos que

(18) $$X^0 = X^{00}$$

donde X denota el espacio. En efecto, de la identidad $(X = X^0 \cup (X - X^0)$ en virtud de (16) y (17) se deduce que

$$X^0 = X^{00} \cup (X - X^0)^0 = X^{00}.$$

Teorema 2. *Todo espacio separable X que no contiene conjuntos no vacíos densos en sí (o sea, un espacio diseminado) es numerable.*

Demostración. En virtud de (18) y (14), tenemos que $X^0 = X^{00} \subset X^{0d}$, es decir, $X^0 \subset X^{0d}$, lo que significa que el conjunto X^0 es denso en sí. Como $X^0 = \emptyset$ por la hipótesis, se sigue que $X = X - X^0$, y este último conjunto es numerable en virtud del Teorema 1.

Teorema 3 (Cantor-Bendixon). *Todo espacio separable es la reunión de dos conjuntos disjuntos, uno denso en sí y cerrado (o sea, perfecto) y otro numerable.*

Esto es una consecuencia inmediata del Teorema precedente y del Teorema 3, Capítulo 11.5.

EJERCICIOS

1. Mostrar que el espacio considerado en el Ejercicio 1, Capítulo 9, no es separable.

Sugerencia: Mostrar que existe un continuo de conjuntos abiertos disjuntos en este espacio.

2. Probar que $A^0 - B^0 \subset (A - B)^0$.

3. Probar las reglas

$$(\cap_t A_t)^0 \subset \cap_t A_t^0, \qquad \cup_t A_t^0 \subset (\cup_t A_t)^0.$$

4. Supongamos que todo número ordinal $\xi < \alpha$ tiene asignado un conjunto abierto A_ξ situado en el espacio separable X, de forma que $A_{\xi+1} \subset A_\xi$ y $A_{\xi+1} \neq A_\xi$.
Probar que $\alpha < \Omega$ (o sea, que existe sólo un número numerable de conjuntos A_ξ).

Sugerencia: Sea $G_1, G_2, \ldots$ una base del espacio X. Asígnese a todo ξ (con excepción quizá del último) un número $n(\xi)$ tal que

$$G_{n(\xi)} \subset A_\xi \quad \text{y} \quad G_{n(\xi)} - A_{\xi+1} \neq \emptyset.$$

5. Probar el teorema análogo, obtenido suponiendo que los conjuntos A_ξ son cerrados.

6. Deducir el siguiente corolario del teorema anterior: todo conjunto de números reales que está bien ordenado respecto a la relación « menor que » es numerable.

7. Los conjuntos derivados de orden transfinito se definen inductivamente por medio de las fórmulas

$$X^{(1)} = X^d, \quad X^{(\xi+1)} = (X^\xi)^d, \quad X^\lambda = \cap_{\xi<\lambda} X^{(\xi)} \text{ (λ es un límite ordinal).}$$

Demostrar (utilizando el Ejercicio 5) que a partir de algún $\alpha < \Omega$ los conjuntos derivados de todos los órdenes son iguales.

8. Deducir el teorema de Cantor-Bendixon de la conclusión anterior utilizando el Teorema 4, apartado 3.

9. Si los conjuntos $R_1, R_2, \ldots$ forman una base del espacio X y los conjuntos $S_1, S_2, \ldots$ forman una base del espacio Y, entonces los conjuntos $R_m \times S_n (m = 1, 2, \ldots; n = 1, 2, \ldots)$ forman una base del espacio $X \times Y$.

10. Se dice que un espacio es *localmente separable* en el punto p si hay un entorno separable de p. Citar un ejemplo de un espacio métrico que no sea localmente separable en ninguno de sus puntos.

Sugerencia: Utilizar una construcción análoga a la empleada en el Ejercicio 1, Capítulo 9.

CAPÍTULO 14

Espacios completos

14.1. Espacios completos

DEFINICIÓN. Decimos que una sucesión de puntos $p_1, p_2, \dots$ en un espacio métrico es una *sucesión de Cauchy* si para todo $\varepsilon > 0$ existe un k tal que para todo $n > k$ se verifica

(1) $$|p_n - p_k| < \varepsilon$$

esto es, si

$$\bigwedge_\varepsilon \bigvee_k \bigwedge_n [(n > k) \Rightarrow (|p_n - p_k| < \varepsilon)].$$

Se dice que un espacio métrico es *completo* si toda sucesión de Cauchy es convergente, es decir, existe un punto p de este espacio tal que $p = \lim_{n\to\infty} p_n$.

El espacio de todos los números reales es completo según el conocido Teorema de Cauchy del Análisis. Advirtamos que el que un espacio sea completo no es una propiedad topológica: El espacio de los números reales es homeomorfo al intervalo abierto $0 < x < 1$ (cfr. Capítulo 12.4) y éste no es completo, puesto que la sucesión $1/2, 1/3, 1/4, \dots$ es una sucesión de Cauchy y no es convergente en este espacio.

Teorema. *Toda sucesión convergente (en un espacio métrico arbitrario) es una sucesión de Cauchy.*

DEMOSTRACIÓN. En efecto, si la sucesión $p_1, p_2, \dots$ es convergente hacia el punto p, entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe un k tal que para todo $n > k$ se verifica la desigualdad

(2) $$|p_n - p| < \varepsilon/2.$$

En particular para $n = k$ tenemos

(3) $$|p_k - p| < \varepsilon/2.$$

Para $n > k$, la desigualdad (1) se deduce inmediatamente de las (2) y (3).

14.2 Teorema de Cantor

Sea $\{F_n\}$ una sucesión decreciente de conjuntos cerrados no vacíos en un espacio completo:

(4) $$F_1 \supset F_2 \supset \ldots \supset F_n \supset F_{n+1} \supset \ldots$$

Si

(5) $$\lim_{n\to\infty} \delta(F_n) = 0,$$

resulta

(6) $$\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset.$$

Demostración. Sea $p_n \in F_n$. Entonces $p_1, p_2, \ldots$ es una sucesión de Cauchy. En efecto, en virtud de (5) para todo $\varepsilon > 0$ existe un k tal que $\delta(F_n), < \epsilon$, para $n > k$.

Por (4) tenemos también que $p_n \in F_n \subset F_k$, por lo que para $n > k$ se verifica que

$$p_n, p_k \in F_k, \qquad \text{de donde} \qquad |p_n - p_k| < \delta(F_n) < \varepsilon,$$

es decir $p_1, p_2, \ldots$ es una sucesión de Cauchy. Como el espacio es completo, la sucesión es convergente. Escribamos, pues, $p = \lim_{n\to\infty} p_n$.

Para todo m, los términos de la sucesión $p_1, p_2, \ldots$, con excepción a lo sumo de los $m - 1$ primeros, pertenecen a F_m, y como el conjunto F_m es cerrado, el límite de esta sucesión pertenece también a F_m, o sea,

$$p \in F_m \quad \text{para} \quad m = 1, 2, \ldots, \quad \text{esto es,} \quad p \in \bigcap_{m=1}^{\infty} F_m.$$

Nota. El conjunto $\bigcap_{m=1}^{\infty} F_m$ consta del único punto p.

14.3. Teorema de Baire

En un espacio completo no vacío, la unión

(7) $$E = F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_k \cup \ldots$$

de conjuntos frontera cerrados no puede llenar el espacio completo; además, esta unión es un conjunto frontera.*

Demostración. Para demostrar que el conjunto E es un conjunto frontera en el espacio X, es suficiente mostrar que todo entorno esférico S_0

(*) Los conjuntos de la forma (7) (en donde los conjuntos F son conjuntos frontera cerrados) así como sus subconjuntos, se dice que son *conjuntos de primera categoría.*

de un punto arbitrario contiene puntos del conjunto $X - E$ (véase Capítulo 11.4, Teorema 2).

Como el conjunto cerrado F_1 es un conjunto frontera, existirá un punto en S_0 con un entorno esférico S_1 tal que $\bar{S}_1 \subset S_0$ y $\bar{S}_1 \cap F_1 = \emptyset$ (ver Capítulo 11.4, Teorema 3). Evidentemente podemos suponer que $\delta(S_1) < 1$.

Análogamente encontraremos un S_2 tal que $\bar{S}_2 \subset S_1$, $\bar{S}_2 \cap F_2 = \emptyset$ y $\delta(S_2) < 1/2$.

Reiterando, obtenemos una sucesión de entornos esféricos que satisfacen las condiciones:

(8) $$S_0 \supset \bar{S}_1 \supset \bar{S}_2 \supset \ldots \supset \bar{S}_n \supset \ldots$$

(9) $$\bar{S}_n \cap F_n = \emptyset$$

y

(10) $$\delta(S_n) < 1/n, \quad \text{de donde} \quad \lim_{n\to\infty} \delta(S_n) = 0.$$

A partir del Teorema de Cantor, deducimos, en virtud de (8) y (10) que existe un punto p, perteneciente a todos los conjuntos $\bar{S}_n$. Por tanto (por (9))

$$p \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bar{S}_n \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} (X - F_n) = X - \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n,$$

de donde por (7) $p \in X - E$. También $p \in S_0$.

Esto completa la demostración del Teorema de Baire.

Notas. 1. Como un subconjunto de un conjunto frontera es un conjunto frontera, el teorema de Baire se puede enunciar también del siguiente modo: en un espacio completo todo conjunto de primera categoría es un espacio frontera.

2. Del Teorema de Baire se deduce que todo espacio no vacío, completo y denso en sí es no numerable.

En efecto, si el espacio fuese numerable: $X = (p_1, p_2, \ldots)$, entonces sería la unión de una sucesión de conjuntos de un sólo punto:

$$X = \{p_1\} \cup \{p_2\} \cup \ldots$$

Pero cada uno de estos conjuntos es un conjunto cerrado frontera, ya que cada uno de los puntos p_n es de acumulación del espacio X (cfr. Capítulo 11.4, Teorema 4).

Como el espacio $\mathcal{E}$ de los números reales es completo y denso en sí, hemos obtenido una nueva demostración de la desigualdad $\mathfrak{c} > \mathfrak{a}$.

3. El conjunto de los números irracionales no es un conjunto F_σ en el espacio $\mathcal{E}$ (y por tanto, el conjunto de los racionales no es un conjunto G_δ).

En efecto si fuese cierto lo contrario, el conjunto de los irracionales sería unión numerable de conjuntos frontera cerrados (ya que el conjunto de los irracionales es él mismo un conjunto frontera). Pero como el conjunto de los racionales es una unión numerable de conjuntos de un solo elemento — y por tanto de conjuntos frontera cerrados —, el espacio completo $\mathcal{E}$ se podría representar como unión numerable de conjuntos frontera cerrados; pero esto sería una contradicción con el Teorema de Baire.

EJERCICIOS

1. Mostrar por medio de un ejemplo que el Teorema de Baire no se verifica en espacios métricos arbitrarios.

2. El producto cartesiano $X \times Y$ de dos espacios completos metrizados con ayuda de la fórmula

$$|\langle x_1, y_1\rangle - \langle x_2, y_2\rangle| = \{|x_1 - x_2|^2 + |y_1 - y_2|^2\}^{1/2}$$

es completo.

3. El producto cartesiano $X_1 \times X_2 \times X_3 \times \ldots$ de espacios completos es completo si la distancia entre dos puntos $x = (x_1, x_2, \ldots)$ e $y = (y_1, y_2, \ldots)$ está definida por

$$|x - y| = \sum_{n=1}^{\infty} (1/2)^n |x_n - y_n|/(1 + |x_n - y_n|).$$

4. Demostrar que todo conjunto G_δ perteneciente a un espacio completo es homeomorfo al espacio completo (Teorema de Aleksandrov).
Sugerencia: Utilícense los Ejercicios 3 y 12, Capítulo 12.

5. Sean X un espacio métrico e Y un espacio completo. Demostrar que el conjunto Φ de todas las aplicaciones acotadas del espacio X en subconjuntos de Y, provisto de métrica por (6), Capítulo 9.1, es completo (cfr. Ejercicio 5, Capítulo 9).

6. Utilizando el ejercicio precedente y el Teorema 1, Capítulo 12.5, demostrar que el subconjunto del espacio Φ constituido por todas las aplicaciones continuas es un espacio completo.

7. Demostrar que todo espacio métrico es isométrico con un subconjunto de algún espacio completo.
Sugerencia: Utilícese el ejercicio precedente y el Ejercicio 4, Capítulo 9.

CAPÍTULO **15**

Espacios compactos

El concepto de espacio completo surge de una generalización del Teorema de Cauchy; de forma análoga, la idea de espacio compacto surge de una generalización del Teorema de Bolzano-Weierstrass.

15.1. Espacios compactos

DEFINICIÓN. Se dice que un espacio métrico es *compacto* si podemos seleccionar de cada sucesión de puntos $p_1, p_2, \ldots$, de este espacio una sucesión parcial convergente hacia algún punto p de este espacio, esto es, si existen una sucesión de índices.

(1) $$k_1 < k_2 < \ldots$$

y un punto p, tales que

(2) $$\lim_{n\to\infty} p_{k_n} = p.$$

Cuando decimos que un conjunto A (situado en un espacio métrico) es compacto, entendemos que el conjunto A, tratado como un espacio forma un espacio compacto; hablando estrictamente, que toda sucesión de puntos perteneciente al conjunto A contiene una sucesión parcial que converge hacia un punto que también pertence a A.

EJEMPLO. El Teorema clásico de Bolzano-Weierstrass afirma que el intervalo cerrado $a \leqslant x \leqslant b$ es un espacio compacto. Con ayuda de este Teorema es fácil demostrar que el cuadrado cerrado en el plano, y de modo más general, el cubo cerrado en espacio euclídeo n-dimensional, es un espacio compacto.

Como demostraremos, los espacios compactos situados en espacios euclídeos n-dimensionales, son idénticos a los conjuntos cerrados y acotados de este espacio.

15.2. Propiedades de los espacios métricos compactos

Teorema 1. *Un espacio compacto es completo.*

Demostración. Supongamos que la sucesión de puntos $p_1, p_2, \ldots$ es una sucesión de Cauchy. Vamos a mostrar que es convergente.

Por hipótesis, para un $\varepsilon > 0$, existe un j tal que para $n > j$ se verifica la desigualdad

(3) $$|p_n - p_j| < \varepsilon.$$

Como el espacio es compacto, podemos seleccionar una sucesión parcial de la $p_1, p_2, \ldots$ que satisfaga las condiciones (1) y (2).

Vamos a demostrar que

(4) $$\lim_{n\to\infty} p_n = p.$$

En virtud de (2) existe un $m > j$ tal que

(5) $$|p_{k_m} - p| < \varepsilon.$$

Como (en virtud de (1)) $k_m \geqslant m > j$, tenemos por (3) que

(6) $$|p_{k_m} - p_j| < \varepsilon.$$

Sumando miembro a miembro las desigualdades (3), (5) y (6) obtenemos

$$|p_n - p| < 3\varepsilon \quad \text{para} \quad n > j,$$

lo que demuestra la igualdad (4).

Teorema 2. *Todo espacio compacto es separable. Además, para todo $\varepsilon > 0$ existe un número finito de puntos cuyo conjunto $A_\varepsilon = \{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$ es tal, que*

(7) $$\varrho(x, A_\varepsilon) < \varepsilon,$$

es decir, que todo punto x del espacio se encuentra a una distancia menor que ε de algún punto del conjunto A_ε.

Definimos inductivamente el conjunto A_ε. Sea p_1 un punto arbitrario de nuestro espacio, y p_2 otro punto arbitrario tal que $|p_1 - p_2| \geqslant \varepsilon$, suponiendo que tal punto existe; si no existiese tomaríamos $A_\varepsilon = \{p_1\}$.

En general p_n es un punto arbitrario tal que

(8) $$|p_n - p_m| \geqslant \varepsilon \quad \text{para todo} \quad m < n,$$

suponiendo que exista tal punto p_n; si no existiese tomaríamos

$$A_\varepsilon = \{p_1, \ldots, p_{n-1}\}.$$

La sucesión $p_1, p_2, \ldots$ formada de esta manera tiene que ser finita; pues en caso contrario, tendría que contener una sucesión parcial convergente (en virtud de la hipótesis de compacidad), lo cual, no obstante, es

imposible, ya que de la condición (8) se sigue que ninguna de las sucesiones parciales de $p_1, p_2, \ldots$ es una sucesión de Cauchy, por lo que no puede ser convergente.

Así hemos definido el conjunto A_ε. Nos queda por mostrar que el espacio es separable.

Sea $B = A_1 \cup A_{1/2} \cup \ldots \cup A_{1/n} \cup \ldots$ Este conjunto es numerable. Es denso en el espacio, porque para todo x y para todo n tenemos que $\varrho(x, B) \leq \varrho(x, A_{1/n}) < 1/n$ (en virtud de (7) y del Teorema 2, Capítulo 12.7); esto significa que existe un punto $b \in B$ tal que $|x - b| < 1/n$. Y por tanto $x \in \overline{B}$.

Teorema 3. *Todo espacio compacto X es acotado.*

DEMOSTRACIÓN. Hagamos $\varepsilon = 1$ en el Teorema 2. Se sigue que $\delta(X) < \delta(A_1) + 2$.

Teorema 4. *Un subconjunto compacto A de un espacio arbitrario X es un conjunto cerrado.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que el conjunto A no es cerrado. Por tanto, existirá una sucesión de puntos pertenecientes a A convergente hacia un punto p no perteneciente a A. Entonces, toda sucesión parcial de esta sucesión converge también hacia p; luego, el conjunto A no es compacto (por no pertenecer a él el punto p).

Teorema 5. *Todo subconjunto cerrado F de un espacio compacto X es compacto.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $p_1, p_2, \ldots$ una sucesión arbitraria de puntos del conjunto F. Como X es un espacio compacto, podemos elegir de esta sucesión una sucesión parcial que satisfaga las condiciones (1) y (2).

Por otra parte, por ser F cerrado, la condición (2) nos dice que $p \in F$, lo que demuestra la compacidad del conjunto F.

15.3. Los teoremas de Cantor y Borel

1. Teorema de Cantor. *En un espacio compacto toda sucesión decreciente de conjuntos cerrados no vacíos*

(9) $$F_1 \supset F_2 \supset \ldots \supset F_n \supset \ldots$$

satisface la desigualdad

(10) $$\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset.$$

El curso de esta demostración es similar al de la demostración del Teorema de Cantor para espacios completos. En efecto, sea p_n un punto arbitrario del conjunto F_n. Elegimos una sucesión parcial $p_{k_1}, p_{k_2}, \ldots$ de $\{p_n\}$ que converja hacia algún punto p de nuestro espacio (o sea que satisfaga

la desigualdad (2)).

Como, en virtud de (9), cada uno de los conjuntos F_n contiene casi todos* los términos de la sucesión p_1, p_2, p_n y por tanto así todos los de la sucesión $p_{k_1}, p_{k_2}, \ldots$ tenemos que $p \in F_n$, por ser cerrados los conjuntos F_n.

Esto significa que se satisface la desigualdad (10).

Del teorema de Cantor deducimos el siguiente:

2. **Teorema de Borel.** *Si X es un espacio compacto tal que*

(11) $$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n,$$

siendo G_n conjuntos abiertos, existe un índice m tal que

(12) $$X = G_1 \cup \ldots \cup G_m.$$

Nota. Podemos formular el teorema de Borel como sigue: *todo recubrimiento numerable de un espacio compacto por medio de conjuntos abiertos contiene un recubrimiento finito.*

Demostración. Supongamos que no existiese tal índice y sea

(13) $$F_n = X - (G_1 \cup G_2 \cup \ldots \cup G_n).$$

Por tanto, F_n es un conjunto cerrado no vacío (por ser el complemento de un conjunto abierto).

En virtud de (13), se satisface la condición (9) y, por tanto, de acuerdo con el Teorema de Cantor, se verifica la desigualdad (10). De esto y de las leyes de De Morgan deducimos que

$$X \neq X - \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (X - F_n).$$

Al mismo tiempo, por (13), tenemos que

$$\bigcup_{n=1} (X - F_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (G_1 \cup G_2 \cup \ldots \cup G_n),$$

y por tanto

$$\bigcup_{n=1} (G_1 \cup G_2 \cup \ldots \cup G_n) \neq X.$$

En virtud de (11) tenemos

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (G_1 \cup G_2 \cup \ldots \cup G_n),$$

es decir, $\bigcup_{n=1}^{\infty} (G_1 \cup G_2 \cup \ldots \cup G_n) = X$.

Por tanto, hemos llegado a una contradicción. Esto completa la demostración del Teorema de Borel.

Nota. Inversamente, sería posible deducir, de un modo análogo, el Teorema de Cantor del Teorema de Borel (los Teoremas de Cantor y Borel son duales).

(*) Es decir: todos menos un número finito.

El siguiente teorema es una puntualización del Teorema de Borel:

3. Teorema de Borel-Lebesgue. *Todo recubrimiento de un espacio compacto por medio de conjuntos abiertos contiene un recubrimiento finito.*

DEMOSTRACIÓN. Hagamos

$$X = \bigcup_t G_t.$$

Como el espacio X es separable, ya que es compacto (cfr. Teorema 2, apartado 2), podemos aplicar el Teorema de Lindelöf (Cap. 13.1, Teorema 3), en virtud del cual cualquier recubrimiento del espacio X por medio de conjuntos abiertos G_t contiene un recubrimiento numerable:

$$X = \bigcup_{n=1} G_{t_n}.$$

Aplicando el Teorema de Borel a este recubrimiento, elegimos un recubrimiento finito $G_{t_1}, G_{t_2}, \ldots G_{t_n}$:

$$X = G_{t_1} \cup G_{t_2} \cup \ldots \cup G_{t_n}.$$

Notas. 1. Así como el Teorema de Borel es dual del Teorema de Cantor, el de Borel-Lebesgue es dual del siguiente teorema (debido a Riesz) que establece una generalización del Teorema de Cantor:

Si una familia de conjuntos abiertos F_t de un espacio compacto X es tal que

$$F_{t_1} \cap F_{t_2} \cap \ldots \cap F_{t_n} \neq \emptyset$$

para todo sistema finito de índices, entonces

$$\bigcap_t F_t \neq \emptyset.$$

La demostración no presenta ninguna dificultad, basando la argumentación en el Teorema de Borel-Lebesgue (si ponemos $G_t = X - F_t$).

2. El Teorema de Borel-Lebesgue puede enunciarse de la forma siguiente, algo más general:

Sean una familia dada de conjuntos abiertos G_t y un espacio compacto A, tales que

$$A \subset \bigcup_t G_t$$

en un espacio arbitrario X; entonces existe un sistema finito de índices $t_1, t_2, \ldots, t_n$, tal que

$$A \subset G_{t_1} \cup G_{t_2} \cup \ldots \cup G_{t_n}.$$

Teorema 4. *En un espacio compacto, la familia de conjuntos que son a la vez abiertos y cerrados, es numerable.*

DEMOSTRACIÓN. Como un espacio compacto es separable (véase Teorema 2, apartado 2) contiene una sucesión de conjuntos abiertos $G_1, G_2, \ldots$

tal que todo conjunto abierto no vacío H es la reunión de cierto número de estos conjuntos (véase Cap. 13.1, Teorema 2). Si, además, el conjunto H es cerrado, podemos suponer que este número es finito (en virtud del Teorema de Borel). Por tanto podemos asignar a todo conjunto abierto-cerrado H un sistema finito de números naturales $k_1, k_2, k_3, \ldots, k_n$ de forma que

$$H = G_{k_1} \cup G_{k_2} \cup \ldots \cup G_{k_n}.$$

Evidentemente, a conjuntos distintos H corresponden distintos sistemas de números naturales. Por tanto, a lo sumo hay tantos conjuntos abiertos-cerrados como sistemas finitos de números naturales, y el número de éstos es numerable (véase Capítulo 5.3, Teorema 5).

15.4. Aplicaciones continuas de espacios compactos

Teorema 1. *La imagen continua de un espacio compacto es un espacio compacto, es decir, la compacidad es un invariante en las aplicaciones continuas.*

Demostración. Supongamos que $f(X) = Y$, siendo f una función continua y X un espacio compacto.

Sea $y_1, y_2, \ldots$ una sucesión arbitraria de puntos del espacio Y. Como todo punto del espacio Y es la imagen de algún punto del espacio X, existe una sucesión de puntos $x_1, x_2, \ldots$ pertenecientes a X tal que $y_n = f(x_n)$.

Como el espacio X es compacto, la sucesión $x_1, x_2, \ldots$ contiene una sucesión parcial convergente $x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots$:

$$\lim_{n\to\infty} x_{k_n} = x \in X.$$

Por la continuidad de f, se sigue que

$$\lim_{n\to\infty} f(x_{k_n}) = f(x), \quad \text{o sea,} \quad \lim_{n\to\infty} y_{k_n} = f(x) \in Y,$$

lo que demuestra que el espacio Y es compacto.

Teorema 2. *Si X es un espacio compacto, $F = \bar{F} \subset X$ y f es una función continua definida en X, entonces, $f(F)$ es un subconjunto cerrado del espacio $f(X)$.*

Dicho de otra forma, $\bar{F} = F$ *implica* $\overline{f(F)} = f(F)$.

Demostración. En virtud del Teorema 5, apartado 2, F es compacto, y por tanto, por el Teorema 1, el conjunto $f(F)$ es compacto, de donde se deduce, por el Teorema 4, apartado 2, que es un subconjunto cerrado del espacio $f(X)$.

Nota. En el Teorema 2 es esencial la hipótesis de compacidad. En efecto, consideremos el ejemplo siguiente: Sea $X =$ el plano, $F =$ la hipérbola $y = 1/x$ y f la proyección del plano en el eje x, o sea, $f(x, y) = x$.

Teorema 3. *Si la función f continua y uno-uno aplica el espacio compacto X sobre Y, entonces f es un homeomorfismo.*

Demostración. Tenemos que demostrar que la función inversa $g = f^{-1}$ es continua, o sea (cfr. Capítulo 12.2, Teorema 1), que si F es un subconjunto cerrado arbitrario del espacio X, entonces el conjunto $g^{-1}(F)$ es cerrado en Y. Pero $g^{-1} = f$ y por tanto $g^{-1}(F) = f(F)$ y, por el Teorema 2, $f(F)$ es cerrado en Y.

Teorema 4 (Generalización del Teorema de Weierstrass). *Toda función real continua f definida en un espacio compacto X está acotada y alcanza efectivamente su cota superior mínima y su cota inferior máxima.*

Demostración. El conjunto $f(X)$ es, en virtud del Teorema 1, un subconjunto compacto del conjunto de los números reales y, por tanto, (cfr. Teoremas 3 y 4, apartado 2) es un conjunto cerrado y acotado. Como el conjunto $f(X)$ es cerrado, la cota superior mínima m_0 y la cota inferior máxima m_1 de la función f pertenecen a $f(X)$. Por tanto, existe una x_0 tal que $f(x_0) = m_0$ y una x_1 tal que $m_1 = f(x_1)$, como queríamos demostrar.

Introducimos ahora el concepto de continuidad uniforme de un modo análogo a como se hace en Análisis.

Decimos que la función f definida en el espacio X y con recorrido en el espacio Y es *uniformemente continua*, si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ (que sólo depende de ε) tal que la condición $|x' - x''| < \delta$ implica la desigualdad $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ para pares arbitrarios de puntos x', x'' del espacio X; simbólicamente esta condición se escribe

$$\bigwedge_{\varepsilon} \bigvee_{\delta} \bigwedge_{x'} \bigwedge_{x''} \{[|x' - x''| < \delta] \Rightarrow [|f(x') - f(x'')| < \varepsilon]\}.$$

La continuidad en el sentido ordinario se sigue de la continuidad uniforme. El teorema recíproco no es cierto como lo muestra este caso:

$$y = 1/x \qquad (0 < x < 1), \qquad y = e^x \qquad (-\infty < x < +\infty).$$

Por otra parte, en los espacios compactos es válido el siguiente teorema:

Teorema 5. (Generalización del teorema de Heine sobre continuidad uniforme). *Una función continua definida en un espacio compacto X es uniformemente continua.*

Demostración. Supongamos lo contrario, que la función f no es uniformemente continua. Por tanto, existirá un $\varepsilon > 0$ tal que para cada

$\delta > 0$ exista un par de puntos x', x'' en el espacio X que satisfagan las condiciones

$$|x' - x''| < \delta \quad \text{y} \quad |f(x') - f(x'')| \geq \varepsilon,$$

o sea,

$$\bigvee_{\varepsilon} \bigwedge_{\delta} \bigvee_{x'} \bigvee_{x''} \{[|x' - x''| < \delta] \wedge [|f(x') - f(x'')| \geq \varepsilon]\}.$$

De esto se sigue en particular para $\delta = 1/n$ que existen un par de puntos x'_n, x''_n tales que

(14) $$|x'_n - x''_n| < 1/n,$$

(15) $$|f(x'_n) - f(x''_n)| \geq \varepsilon.$$

Por ser el espacio X compacto, podemos seleccionar una sucesión parcial convergente $x'_{k_1}, x'_{k_2}, \ldots$ de la sucesión $x'_1, x'_2, \ldots$

Sea

(16) $$\lim_{n\to\infty} x'_{k_n} = x.$$

De las condiciones (14) y (16) se sigue que

(17) $$\lim_{n\to\infty} x''_{k_n} = x.$$

Por ser continua la función, de (16) y (17) deducimos que

$$\lim_{n\to\infty} f(x'_{k_n}) = f(x) \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} f(x''_{k_n}) = f(x),$$

de donde

$$\lim_{n\to\infty} |f(x'_{k_n}) - f(x''_{k_n})| = 0,$$

en contradicción con la desigualdad (15).

***Teorema 6** (sobre convergencia continua). *Condición necesaria y suficiente para que la sucesión de funciones continuas $f_1, f_2, \ldots$ definida en un espacio compacto X sea uniformemente convergente hacia la función f es que la condición*

(18) $$\lim_{n\to\infty} x_n = x$$

implique

(19) $$\lim_{n\to\infty} f_n(x_n) = f(x).$$

(Decimos que la sucesión de funciones $f_1, f_2, \ldots$ es *convergente con continuidad* si la condición (18) implica la (19)).

DEMOSTRACIÓN. *Es necesaria.* Supongamos que la sucesión $f_1, f_2, \ldots$ es uniformemnte convergente hacia la función f. Sea $\varepsilon > 0$. Por tanto, existe un k tal que

(20) $$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

para todo x y para toda $n > k$.

Vamos a suponer que se cumple (18) y demostraremos que se verifica (19).

Aplicando (20) tendremos

(21) $$|f_n(x_n) - f(x_n)| < \varepsilon$$

para $n > k$.

Como la función f es continua, siendo además el límite de una sucesión uniformemente convergente de funciones continuas (cfr. Capítulo 12.5, Teorema 1), se verificará por (18)

(22) $$|f(x_n) - f(x)| < \varepsilon$$

para un n suficientemente grande.

De las desigualdades (21) y (22) deducimos que para un n suficientemente grande

$$|f_n(x_n) - f(x)| < 2\varepsilon,$$

lo que demuestra que se satisface la igualdad (19).

Es suficiente. Supongamos que la sucesión de funciones continuas f sea convergente con continuidad hacia f, pero no uniformemente convergente:

$$\bigvee_{\varepsilon} \bigwedge_n \bigvee_x \bigvee_k \{(k > n) \wedge [|f_k(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon]\},$$

o sea, podemos elegir para algún $\varepsilon > 0$ y para todo número natural n un punto x_n y un índice k_n tal que

(23) $$k_1 < k_2 < \ldots < k_n < \ldots,$$

(24) $$|f_{k_n}(x_n) - f(x_n)| \geqslant \varepsilon \quad \text{para} \quad n = 1, 2, \ldots$$

Por ser compacto el espacio X, podemos elegir una sucesión parcial conveniente de la sucesión $x_1, x_2, \ldots$ Evidentemente podemos suponer que los puntos x_n están elegidos de forma que la sucesión $x_1, x_2, \ldots$ sea convergente. Ahora, supongamos que se satisface la igualdad (18). Demostraremos que

(25) $$\lim_{n\to\infty} f_{k_n}(x_n) = f(x).$$

Construimos la sucesión $x'_1, x'_2, \ldots$ del modo siguiente:

(26) $$x'_m = x_n \quad \text{para} \quad k_{n-1} < m \leqslant k_n \quad (\text{con } k_0 = 0).$$

Evidentemente

$$\lim_{m\to\infty} x'_m = \lim_{n\to\infty} x_n = x.$$

De esto, en virtud de la convergencia continua de la sucesión $f_1, f_2, \ldots$ tenemos que

$$\lim_{m\to\infty} f_m(x'_m) = f(x),$$

y por tanto

(27) $$\lim_{n\to\infty} f_{k_n}(x'_{k_n}) = f(x).$$

Pero como, por (26), $x'_{k_n} = x_n$, de (27) se tiene (25).

Ya que la sucesión $\{f_m\}$ es convergente con continuidad,

$$\lim_{m\to\infty} f_m(x_0) = f(x_0)$$

para un x_0 fijo. Por tanto, para todo n tenemos

$$\lim_{m\to\infty} f_m(x_n) = f(x_n)$$

de donde deducimos que la desigualdad

(28) $$|f_{m_n}(x_n) - f(x_n)| < 1/n$$

se verifica para alguna sucesión creciente de índices

(29) $$m_1 < m_2 < \ldots < m_n < \ldots$$

Mostramos antes que las condiciones (18) y (23) implican (25). Por tanto, teniendo en cuenta (29), tenemos

(30) $$\lim_{n\to\infty} f_{m_n}(x_n) = f(x).$$

De (25) y (30) se sigue

$$\lim_{n\to\infty} |f_{k_n}(x_n) - f_{m_n}(x_n)| = 0,$$

luego, por (29),

$$\lim_{n\to\infty} |f_{k_n}(x_n) - f(x_n)| = 0,$$

lo que contradice la desigualdad (24).

Esto concluye la demostración del teorema.

15.5. Producto cartesiano de espacios compactos

Teorema 1. *El producto cartesiano $X \times Y$ de los espacios compactos X e Y es un espacio compacto.*

Demostración. Sea $z_n = \langle x_n, y_n \rangle \in X \times Y$, o sea, $x_n \in X$, $y_n \in Y$. Tenemos que demostrar que la sucesión $z_1, z_2, \ldots$ contiene una sucesión parcial convergente.

Por ser el espacio X compacto, podemos elegir una sucesión parcial convergente de la sucesión $x_1, x_2, \ldots$ Así, sea

(31) $$\lim_{n\to\infty} x_{k_n} = x.$$

De modo análogo, por ser el espacio Y compacto, podemos seleccionar una sucesión parcial convergente de la sucesión $y_{k_1}, y_{k_2}, \ldots$ Sea

(32) $$\lim_{n\to\infty} y_{r_{k_n}} = y.$$

Por (31) tenemos

(33) $$\lim_{n\to\infty} x_{r_{k_n}} = x.$$

De (32) y (33) obtenemos

$$\lim_{n\to\infty} \langle x_{r_{k_n}}, y_{r_{k_n}} \rangle = \langle x, y \rangle \quad \text{o sea} \quad \lim_{n\to\infty} z_{r_{k_n}} = z.$$

Hemos, pues, seleccionado una sucesión parcial convergente de la sucesión $z_1, z_2, \ldots$, con lo que la demostración está completa.

De forma análoga se puede demostrar que el producto cartesiano de un número arbitrario finito de espacios compactos es compacto.

Nota. En particular, el cubo n-dimensional $\mathcal{I}^n$ es un espacio compacto. De esto se sigue que *para subconjuntos de un espacio euclídeo $\mathcal{E}^n$ el concepto de compacto coincide con el concepto de conjunto cerrado y acotado*. En efecto, todo subconjunto acotado del espacio $\mathcal{E}^n$ queda contenido en un cubo suficientemente grande (cfr. también Teoremas 3 y 4, apartado 2) y por tanto — por ser un subconjunto cerrado de un espacio compacto —, es compacto (Teorema 5, apartado 2).

Teorema 2. *Si los espacios $X_1, X_2, \ldots$ son compactos, el espacio $X_1 \times X_2 \times \ldots$ es también compacto.*

Demostración. Sea $p_1, p_2, \ldots$ una sucesión de puntos pertenecientes al espacio $X_1 \times X_2 \times \ldots$ Tendremos que

$$p_n = (x_n^1, x_n^2, \ldots, x_n^m, \ldots), \quad \text{en donde} \quad x_n^m \in X \quad \text{para} \quad n, m = 1, 2, \ldots$$

Como el espacio X_1 es compacto, existe una sucesión de números naturales

(34) $$1 < k_1 < k_2 < \ldots$$

tal que la sucesión $x_{k_1}^1, x_{k_2}^1, \ldots$ es convergente. Sea

(35) $$\lim_{n\to\infty} x_{k_n}^1 = x^1.$$

Análogamente, existe una sucesión

(36) $$1 < j_1 < j_2 < \ldots$$

tal que la sucesión $x^2_{k_{j_1}}, x^2_{k_{j_2}}, \ldots$ es convergente. Sea

(37) $$\lim_{n\to\infty} x^2_{k_{j_n}} = x^2.$$

Reiterando este proceso definimos una sucesión infinita $x^1, x^2, x^3, \ldots$ Sea ahora,

$$q = (x^1, x^2, x^3, \ldots).$$

Tenemos que $q \in X_1 \times X_2 \times \ldots$ Vamos a demostrar que q es el límite de la sucesión

(38) $$p_1, p_{k_{j_1}}, p_{k_{j_{j_1}}}, \ldots$$

En efecto, atendiendo a (34) y (36) se ve que es

$$1 < k_1 < k_{j_1} < k_{j_{j_1}} < \ldots,$$

y por tanto, la sucesión (38) es una sucesión parcial de la sucesión $p_1, p_2, \ldots$

La sucesión

$$x^1_{k_1}, x^1_{k_{j_1}}, \ldots$$

es, pues, una sucesión parcial de la sucesión $x^1_{k_1}, x^1_{k_2}, x^1_{k_3}, \ldots$; por lo que, en virtud de (35) es convergente hacia x^1. Análogamente la sucesión

$$x^2_{k_{j_1}}, x^2_{k_{j_{j_1}}}, \ldots$$

converge hacia x^2 en virtud de (37).

En general, la sucesión

$$x^n_1, x^n_{k_1}, x^n_{k_{j_1}}, \ldots$$

converge hacia x^n.

Así, hemos demostrado que la sucesión (38), que forma una sucesión parcial de la sucesión $p_1, p_2, \ldots$, es convergente hacia q. Esto significa que el espacio $X_1 \times X_2 \times \ldots$ es compacto.

15.6. El espacio funcional Y^X

Sea X un espacio compacto e Y un espacio métrico arbitrario. Designamos por Y^X (Cap. 12.2) el conjunto de todas las funciones continuas de la forma $y = f(x)$, en donde $x \in X$ e $y \in Y$.

Bajo la hipótesis de que X es un espacio compacto, podemos considerar Y^X como un espacio métrico, mediante la definición de distancia entre dos «puntos» f y g de este espacio por la fórmula (cfr. Capítulo 9.1, 4):

(39) $$|f - g| = \text{cota superior mínima de } |f(x) - g(x)|.$$

El extremo inferior considerado aquí existe siempre, porque al ser $|f-g|$ una función continua (véase Capítulo 12.6, Teorema 4) de la variable x, que recorre el espacio compacto X, es acotada (por el Teorema 4, apartado 4).

Las condiciones (1)-(3) de la definición de un espacio métrico (Capítulo 9.1) se siguen inmediatamente de la fórmula (39). Por tanto Y^X es efectivamente un espacio métrico.

De acuerdo con la definición de límite dada en el Capítulo 10.1 tenemos que

$$(\lim_{n\to\infty} f_n = f) \equiv (\lim_{n\to\infty} |f_n - f| = 0)$$
$$\equiv \bigwedge_\varepsilon \bigvee_k \bigwedge_n \{(n > k) \Rightarrow [\text{c. s. m. } |f_n(x) - f(x)|] < \varepsilon\}$$
$$\equiv \bigwedge_\varepsilon \bigvee_k \bigwedge_n \bigwedge_x \{(n > k) \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\}.$$

Llegamos por tanto al siguiente teorema.

Teorema 1. *La condición* $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ *significa que la sucesión de funciones* $f_1, f_2, \ldots$ *converge uniformemente hacia la función* f.

Como puede observarse, la convergencia de las funciones f_n en el espacio Y^X no sólo significa que esta sucesión es convergente para todo x, sino que es uniformemente convergente en todo el espacio X.

Teorema 2. *Si el espacio X es compacto y el espacio Y es completo, el espacio* Y^X *es completo.*

Demostración. Sea $f_1, f_2, \ldots$ una sucesión de Cauchy de elementos del espacio Y^X. Esto significa que para todo $\varepsilon > 0$, existe un k tal que la desigualdad

(40) $$|f_n - f_k| < \varepsilon$$

se verifica para todo $n > k$.

La sucesión

(41) $$f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$$

es una sucesión de Cauchy para todo $x \in X$, pues de (40) se sigue

(42) $$|f_n(x) - f_k(x)| < [\text{c. s. m. } |f_n(x) - f_k(x)|] = |f_n - f_k| < \varepsilon$$

para todo $n > k$.

Por tanto la sucesión (41) es convergente, siendo el espacio Y completo. Designemos este límite por $f(x)$, o sea,

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

Demostraremos que esta convergencia es uniforme. En efecto, la desigualdad $|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ se verifica para todo $m > k$ y por tanto, en virtud de (42) tenemos

$$|f_n(x) - f_m(x)| < 2\varepsilon, \quad \text{de donde} \quad |f_n(x) - \lim_{m\to\infty} f_m(x)| \leq 2\varepsilon,$$

es decir,

$$|f_n(x) - f(x)| \leq 2\varepsilon.$$

Por ser el límite de una sucesión funcional uniformemente convergente, la función $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ es también continua (Capítulo 12.5, Teorema 1), es decir, $f \in Y^X$.

Notas. En particular, el espacio $\mathcal{E}^{\mathcal{I}}$, o sea, el espacio de todas las funciones reales continuas definidas en el intervalo cerrado $0 \leq x \leq 1$ es completo; este espacio no es compacto, como nos muestra el ejemplo $f_n(x) = x^n$. Esta misma observación sirve para el espacio $\mathcal{I}^{\mathcal{I}}$.

El Teorema 2 nos permite aplicar el Teorema de Baire del Capítulo 14.3, a espacios funcionales (en el caso en que el espacio X es compacto y el espacio Y es completo) con el propósito de demostrar teoremas de existencia.

Como un ejemplo de sus numerosas aplicaciones citaremos el siguiente teorema:

Teorema de Banach. *En el espacio $\mathcal{E}^{\mathcal{I}}$ el conjunto de las funciones que poseen una derivada, al menos en un punto, forma un conjunto frontera.*

El Teorema de Banach constituye una notable culminación del Teorema de Weierstrass sobre la existencia de funciones continuas sin derivada en ningún punto.

15.7. El conjunto de Cantor

El conjunto de Cantor es el conjunto $\mathcal{C}$ de todos los números de la forma

(43) $$t = t_1/3 + t_2/9 + \ldots + t_n/3^n + \ldots,$$

en donde t_n toma solamente uno de los dos valores: 0 o 2.

Por tanto los t son los números del intervalo [0, 1] que se pueden escribir en el sistema ternario de numeración sin utilizar la cifra 1.

Por ejemplo, 1/3 pertenece a $\mathcal{C}$, pues

$$1/3 = 0/3 + 2/9 + 2/27 + \ldots + 2/3^n + \ldots = (0.0222\ldots)_3,$$

pero 1/2 no pertenece a $\mathcal{C}$.

Podemos definir $\mathcal{C}$ también geométricamente, del siguiente modo.

Dividimos el intervalo cerrado [0, 1] en 3 partes iguales y suprimimos el intervalo abierto central. Dividimos los intervalos restantes (0, 1/3) y (2/3, 1) en tres partes iguales y suprimimos sus partes (abiertas) centrales. Reiterando obtenemos una sucesión de intervalos suprimidos

$$(1/3, 2/3), (1/9, 2/9), (7/9, 8/9), (1/27, 2/27), \ldots$$

Retirando del intervalo [0, 1] la reunión de todos los intervalos extraídos obtenemos el conjunto $\mathcal{C}$, que antes se definió aritmeticamente.



Fig. 7

$\mathcal{C}$ es un conjunto cerrado y — como se ve fácilmente — denso en sí mismo (y por tanto perfecto), y también un *conjunto frontera* en el intervalo [0, 1]($\mathcal{C}$ no contiene ningún intervalo).

A continuación, señalemos que todo número del conjunto $\mathcal{C}$ posee solamente un desarrollo de la forma (43), en donde t_n es 0 ó 2 (sin esta última hipótesis no se verificaría la unicidad). De esto se sigue fácilmente que una condición necesaria y suficiente para que la sucesión de números del conjunto de Cantor $t^{(1)}, t^{(2)}, \ldots, t^{(n)}$ converja hacia t es que las cifras k-ésimas en el desarrollo de estos números converjan hacia la cifra k-ésima en el desarrollo del número t (para $k = 1, 2, \ldots$), esto es,

$$(44) \qquad (t = \lim_{n\to\infty} t^{(n)}) \equiv \bigwedge_k (t_k = \lim_{n\to\infty} t_k^{(n)}).$$

Esto significa que se verifica el siguiente teorema (cfr. Teorema 2, Capítulo 10.3):

Teorema 1. *El conjunto de Cantor es homeomorfo a la potencia infinita del conjunto constituido por dos elementos, es decir:*

$$\mathcal{C} \underset{\text{top}}{=} \{0, 2\} \times \{0, 2\} \times \{0, 2\} \times \ldots$$

Por tanto, podemos identificar los puntos del conjunto de Cantor con las sucesiones de ceros y doses; con otras palabras, identificamos un número perteneciente a $\mathcal{C}$ con la sucesión de sus cifras en el desarrollo ternario (del tipo (43)).

De esto deducimos el siguiente teorema:

Teorema 2. $\mathcal{C}^2 \underset{\text{top}}{=} \mathcal{C}$.

En efecto, todo punto p del conjunto $\mathcal{C}^2$ puede representarse en la forma $p = \langle x, y\rangle$, en donde x e y son sucesiones de ceros y doses:

$$x = (x_1, x_2, \ldots) \quad \text{e} \quad y = (y_1, y_2, \ldots).$$

A partir de estas dos sucesiones formamos una: $x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots$ que designamos por $f(p)$.

Es fácil de comprobar que f es una aplicación homeomorfa del conjunto $\mathcal{C}^2$ en el conjunto $f(\mathcal{C}^2) = \mathcal{C}$.

Podríamos demostrar de forma similar que $\mathcal{C}^n \underset{\text{top}}{=} \mathcal{C}$ para un n arbitrario. Además, se verifica el siguiente teorema:

Teorema 3. $\mathcal{C} \times \mathcal{C} \times \mathcal{C} \times \ldots \underset{\text{top}}{=} \mathcal{C}$.

Los puntos p del conjunto $\mathcal{C} \times \mathcal{C} \times \ldots$ son sucesiones de puntos pertenecientes a $\mathcal{C}$:

(45) $$p = [p^{(1)}, p^{(2)}, \ldots, p^{(n)}, \ldots], \qquad p^{(n)} \in \mathcal{C}.$$

Recíprocamente, por ser $p^{(n)}$ un punto del conjunto de Cantor, puede considerarse como una sucesión de ceros y doses:

$$p^{(n)} = [p_1^{(n)}, p_2^{(n)}, \ldots, p_m^{(n)}, \ldots].$$

La sucesión doble $\{p_m^{(n)}\}$, en donde $n = 1, 2, \ldots$ y $m = 1, 2, \ldots$, puede, mediante un conocido método (cfr. Capitulo 5.3, (13) y (14)), transformarse en una sucesión simple

$$p_1^{(1)}, p_2^{(1)}, p_1^{(2)}, p_3^{(1)}, p_2^{(2)}, p_1^{(3)}, \ldots$$

Designando esta última sucesión por $f(p)$, obtenemos, como se demuestra fácilmente, un homeomorfismo que aplica $\mathcal{C} \times \mathcal{C} \times \ldots$ en $\mathcal{C}$.

Nota. Consideremos los intervalos (cerrados) «no suprimidos» que aparecen en la construcción del conjunto de Cantor, esto es

$$(0, 1/3), (2/3, 1),$$
$$(0, 1/9), (2/9, 1/3), (2/3, 7/9), (8/9, 1),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Las intersecciones de estos intervalos con el conjunto $\mathcal{C}$ las designamos sucesivamente por $P_1, P_2, P_3, \ldots$ Se verifica el siguiente teorema:

Teorema 4. *Los conjuntos $P_1, P_2, \ldots$ son abiertos y cerrados en el espacio $\mathcal{C}$ y forman una base del espacio. Además*

$$\lim_{n\to\infty} \delta(P_n) = 0.$$

La demostración de que los conjuntos P_n son abiertos y cerrados no ofrece ninguna dificultad. Para demostrar que estos conjuntos forman una base del espacio $\mathcal{C}$, es suficiente señalar que los intervalos de la primera fila tienen una longitud de $1/3$, los de la segunda $1/9$, los de la n-ésima $1/3^n$; además, los intervalos de cada fila forman un recubrimiento del conjunto $\mathcal{C}$.

15.8. Aplicaciones continuas del conjunto de Cantor

Teorema 1. *El intervalo cerrado $0 \leq x \leq 1$ es una imagen continua del conjunto de Cantor.*

Demostración. Definiremos una *función escalonada* que aplique el conjunto de Cantor en el intervalo [0, 1]. Concretamente, estando representados los números $t \in \mathcal{C}$ en la forma (43), haremos

$$\varphi(t) = {}^1/_2(t_1/2 + t_2/4 + \ldots + t_n/2^n + \ldots). \tag{46}$$

Es fácil de comprobar que la función φ tiene el mismo valor en los dos extremos de cada intervalo suprimido; tomamos este valor como valor constante de la función f en este intervalo; en otra parte, esto es, para $t \in \mathcal{C}$ hacemos $f(t) = \varphi(t)$. La figura 8 es la gráfica de esta función « escalonada ».

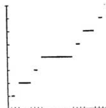


Fig. 8

Teorema 2. *El cubo de Hilbert es una imagen continua del conjunto de Cantor.*

Demostración. Como, en virtud del Teorema 3, apartado 7, el conjunto $\mathcal{C} \times \mathcal{C} \times \mathcal{C} \times \ldots$ es una imagen continua del conjunto $\mathcal{C}$, basta con demostrar que el espacio $\mathcal{H} = \mathcal{J} \times \mathcal{J} \times \mathcal{J} \times \ldots$ es una imagen continua del espacio $\mathcal{C} \times \mathcal{C} \times \mathcal{C} \times \ldots$ Entonces, si representamos el punto p de este último espacio en la forma (45) hacemos

$$f(p) = [\varphi(p^{(1)}), \varphi(p^{(2)}), \ldots, \varphi(p^{(n)}), \ldots], \tag{47}$$

en donde φ es la función escalonada definida por la fórmula (46).

La función f es continua, como se ve fácilmente (cfr. Capítulo 12.6, Teorema 3). Su recorrido son sucesiones de números pertenecientes al intervalo [0, 1], esto es, son puntos del espacio $\mathcal{H}$. Cada punto

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$$

de este espacio es un valor de la función f, pues, en virtud del Teorema 1, para todo n existe un punto $p^{(n)} \in \mathcal{C}$ tal que $x_n = \varphi(p^{(n)})$; por tanto es suficiente definir p por la fórmula (45) para obtener la igualdad $x = f(p)$.

Teorema 3. *Todo espacio compacto es la imagen continua de algún subconjunto cerrado del conjunto de Cantor.*

En efecto, en virtud del Teorema de Urysohn (Cap. 13.4) un espacio compacto X puede mirarse como un subconjunto F del cubo de Hilbert $\mathcal{H}$. Aquí, $F = \overline{F}$ por ser compacto el espacio X (cfr. Teorema 4, apartado 2).

Sea f una función que aplica con continuidad el conjunto de Cantor $\mathcal{C}$ sobre el espacio $\mathcal{H}$. Sea $A = f^{-1}(F)$.

Por la continuidad de la función f, el conjunto A es cerrado (cfr. Capítulo 12.2, Teorema 1). Al mismo tiempo (cfr. Capítulo 4.4, (18)), $f(A) = ff^{-1}(F) = F$.

Nota. El Teorema 3 puede enunciarse de la forma siguiente.

Teorema 4. *Todo espacio compacto no vacío es una imagen continua del conjunto de Cantor.*

En virtud del Teorema 3 es suficiente a este respecto probar el siguiente lema:

Lema. *Todo subconjunto cerrado no vacío F del conjunto de Cantor $\mathcal{C}$ es una imagen continua de $\mathcal{C}$.*

Demostración. Como la sucesión $P_1, P_2, \ldots$ forma una base del espacio $\mathcal{C}$ (véase Teorema 4, apartado 7), el conjunto abierto $\mathcal{C} - F$ es la unión de un cierto número de términos de esta sucesión. Por tanto, sea

$$\mathcal{C} - F = G_1 \cup G_2 \cup \ldots, \tag{48}$$

en donde los conjuntos G_n pertenecen a la sucesión $P_1, P_2, \ldots$ Como ha de ser o $P_i \cap P_j = \emptyset$, o bien $P_j \subset P_i$ para $i < j$, podemos suponer que los conjuntos G_n son disjuntos (pues podemos omitir los términos en las series (48) que están contenidos en términos anteriores).

Designamos por p_n el punto de F situado más cerca del conjunto G_n, esto es, el punto en el cual la función $\varrho(x, G_n)$ definida en el conjunto F alcanza su cota inferior máxima (cfr. Cap. 12.7, Teorema 5, y Cap. 15.4, Teorema 4); si existe más de uno de tales puntos, entonces designamos por p_n alguno de ellos.

Definimos la función f como la retracción del conjunto $\mathcal{C}$ a F, concretamente,

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{para} \quad x \in F, \\ p_n & \text{para} \quad x \in G_n. \end{cases}$$

Por tanto, tenemos $f(\mathcal{C}) = F$. Tenemos que demostrar que la función f es continua.

Por ser abiertos los conjuntos G_n, la función f es evidentemente continua en su unión. Nos queda por demostrar que si

(49) $$\lim_{k\to\infty} x_k = x, \quad \text{en donde} \quad x_k \in \mathcal{C} - F \quad \text{y} \quad x \in F,$$

entonces

(50) $$\lim_{k\to\infty} f(x_k) = f(x), \quad \text{esto es} \quad \lim_{k\to\infty} f(x_k) = x.$$

Designamos por $n(k)$ un índice tal que

(51) $$x_k \in G_{n(k)}.$$

Como a un G_n dado sólo puede pertenecer un número finito de puntos de la sucesión $x_1, x_2, \ldots$ (para $x \notin G_n$) y como (cfr. Teorema 4, apartado 7) tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \delta(P_n) = 0, \quad \text{y por tanto} \quad \lim_{n\to\infty} \delta(G_n) = 0,$$

deducimos de esto que

(52) $$\lim_{k\to\infty} \delta(G_{n(k)}) = 0.$$

Designamos por q_n el punto del conjunto (cerrado) G_n situado más cerca del punto p_n. Tenemos, por tanto, en virtud de la definición de los puntos p_n y q_n

$$|p_n - q_n| = \varrho(p_n, G_n) \leqslant \varrho(x, G_n),$$

y por tanto

$$|p_{n(k)} - q_{n(k)}| \leqslant \varrho(x, G_{n(k)}) \leqslant |x - x_k|$$

según (51); de donde

$$|p_{n(k)} - x_k| \leqslant |p_{n(k)} - q_{n(k)}| + |q_{n(k)} - x_k| \leqslant |x - x_k| + \delta(G_{n(k)}).$$

por lo que en virtud de (49) y (52), tenemos

(53) $$\lim_{k\to\infty} p_{n(k)} = x.$$

Al mismo tiempo, en virtud de la definición de la función f y de la fórmula (51) tenemos

(54) $$f(x_k) = p_{n(k)}$$

y por tanto (50).

*15.9. Espacios bicompactos

Un espacio topológico (no necesariamente métrico) se llama *espacio bicompacto*, si todo recubrimiento por medio de conjuntos abiertos contiene un recubrimiento finito (esto es, si se satisface el teorema de Borel-Lebesgue, véase apartado 3, Teorema 3).

Evidentemente, todo espacio bicompacto es compacto. Pero un espacio compacto puede ser no bicompacto. Por otra parte, un espacio métrico compacto es siempre bicompacto (por el Teorema 3, apartado 3).

Teorema 1. *Todo subconjunto B bicompacto de un espacio* $\mathcal{T}_2$ (véase Capítulo 11, Ejercicio 11) *es cerrado.*

DEMOSTRACIÓN. Sea X el espacio $\mathcal{T}_2$ considerado. Tenemos que demostrar que $X - B$ es abierto. Dicho de otra forma, tenemos que demostrar que, dado un punto $a \in X - B$, existe un conjunto abierto G tal que

(55) $$a \in G \subset X - B.$$

Ahora, bien, por ser X un espacio $\mathcal{T}_2$, para todo punto x de B existen un par de conjuntos abiertos U_x y V_x tales que

(56) $$a \in U_x, \qquad x \in V_x, \qquad U_x \cap V_x = \emptyset.$$

Por tanto, los conjuntos $B \cap V_x$ forman un recubrimiento de B, y (por ser B bicompacto), hay un conjunto finito de puntos, $x_1, \ldots, x_n$ tal que

$$B = (B \cap V_{x_1}) \cup \ldots \cup (B \cap V_{x_n}),$$

de donde

$$B \subset V_{x_1} \cup \ldots \cup V_{x_n}.$$

A la vista de (56) se sigue que el conjunto $G = U_{x_1} \cap \ldots \cap U_{x_n}$ satisface la condición (55).

Teorema 2. *Todo subconjunto cerrado F de un espacio bicompacto X es bicompacto.*

DEMOSTRACIÓN. Hagamos $F = \bigcup_t G_t$, en donde los conjuntos G_t son abiertos con relación a F. Sea H_t un conjunto abierto en X tal que $F \cap H_t = G_t$ (véase Cap. 11, Ejercicio 4). Consideremos el recubrimiento de X compuesto de conjuntos H_t y del conjunto $H = X - F$. El espacio X, por ser compacto, tiene un recubrimiento finito $H, H_{t_1}, H_{t_2}, \ldots, H_{t_n}$, esto es,

$$X = H \cup H_{t_1} \cup \ldots \cup H_{t_n}, \qquad \text{de donde} \qquad F = G_{t_1} \cup \ldots \cup G_{t_n},$$

y por tanto $G_{t_1} \ldots G_{t_n}$ es un recubrimiento finito de F.

Teorema 3. *La imagen continua de un espacio bicompacto es un espacio bicompacto.*

(Aquí, entendemos por aplicación continua una aplicación f tal que $f^{-1}(G)$ es abierto siempre que G sea abierto; cfr. Teorema 2, Capítulo 12.2).

DEMOSTRACIÓN. Sea f una aplicación continua de X en Y. Sea $\{G_t\}$ un recubrimiento abierto de Y. Como $\{f^{-1}(G_t)\}$ es un recubrimiento abierto de X, hay un sistema finito $t_1, \ldots, t_n$ tal que

$$X = f^{-1}(G_{t_1}) \cup \ldots \cup f^{-1}(G_{t_n}), \qquad \text{de donde} \qquad Y = G_{t_1} \cup \ldots \cup G_{t_n}.$$

Teorema 4. *Sea f una aplicación continua de un espacio bicompacto, X, en un espacio-$\mathcal{T}_2$, Y. Entonces:*

1. *Si F es un subconjunto cerrado de X, f(F) es un subconjunto cerrado de Y.*

2. *Si f es uno-uno, entonces f es un homeomorfismo.*

La demostración es en lo esencial como las demostraciones de los Teoremas 2 y 3 del apartado 4.

Nota. Los espacios bicompactos tienen la siguiente interesante propiedad (que enunciamos sin demostración):

Teorema de Tihonov. *El producto cartesiano $\mathbf{P}_t X_t$ de espacios bicompactos es bicompacto* (la topología del producto se define como en el Ejercicio 14, Capítulo 11).

EJERCICIOS

1. Demostrar: Una condición necesaria y suficiente para que el espacio X sea compacto es que el conjunto derivado de todo conjunto infinito $A \subset C$ sea $\neq \emptyset$.

2. Demostrar: Una condición necesaria y suficiente para que un espacio sea compacto es que sea completo y que para todo $\varepsilon > 0$ sea posible representarlo como unión de un número finito de conjuntos con diámetro menor que ε (los espacios con esta última propiedad se llaman *totalmente acotados*).

3. Demostrar: Una condición necesaria y suficiente para que la función f definida en un espacio arbitrario X (compacto o no) sea uniformemente continua, es que la condición

$$\lim_{n\to\infty} |x_n - x'_n| = 0$$

implique la condición

$$\lim_{n\to\infty} |f(x_n) - f(x'_n)| = 0$$

para todo par de sucesiones $x_1, x_2, \ldots$ y $x'_1, x'_2, \ldots$ pertenecientes al espacio X.

4. Demostrar: En un espacio compacto, toda sucesión de funciones $f_1, f_2, \ldots$ que converge hacia la función f con la propiedad de que para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que la condición $|x' - x''| < \delta$ implica

$$|f_n(x') - f_n(x'')| < \varepsilon \quad \text{para} \quad n = 1, 2, \ldots,$$

converge uniformemente hacia f.

5. Demostrar que si f es una aplicación continua del espacio X sobre el espacio Y, y la sucesión $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ es una sucesión decreciente de espacios compactos del espacio X, entonces

$$f(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f(A_n).$$

6. Demostrar el siguiente *Teorema de Banach* (que se verifica en cualquier espacio completo):

Si f es una función que aplica continuamente el espacio completo X en sí mismo, y para todo par de puntos $x_1, x_2 \in X$ se verifica la desigualdad

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq k|x_1 - x_2|,$$

en donde k es una constante que satisface la condición $0 < k < 1$, entonces existe exactamente un punto $x_0 \in X$ tal que $f(x_0) = x_0$.

Sugerencia: Constrúyase inductivamente una sucesión de puntos $x_1, x_2, \ldots$ del modo siguiente: sea x_1 un punto arbitrario del espacio X y $x_n = f(x_{n-1})$. Mostrar que una sucesión construida de esta forma es una sucesión de Cauchy, y poniendo $x_0 = \lim_{n\to\infty} x_n$, probar que $f(x_0) = x_0$.

7. Utilizando el Teorema de Banach probar el siguiente teorema sobre la existencia de una solución de una ecuación diferencial:

Sea la ecuación diferencial

$$\text{(i)} \qquad dy/dx = f(x, y),$$

en donde la función f es continua en una región plana G y satisface en esta región la condición de Lipschitz con respecto a y, esto es, existe una constante M tal que la desigualdad

$$\text{(ii)} \qquad |f(x, y_1) - f(x, y_2)| < M|y_1 - y_2|$$

se verifica para todo par de puntos $\langle x, y_1\rangle, \langle x, y_2\rangle \in G$. Además, sea $\langle x_0, y_0\rangle \in G$ un punto dado. Entonces existe un número $\delta > 0$ tal que en el intervalo $x_0 - \delta, x_0 + \delta$ existe exactamente una función g que satisface la ecuación (i), esto es,

$$\text{(iii)} \qquad dg/dx = f(x, g(x)).$$

y la condición inicial

$$\text{(iv)} \qquad y_0 = g(x_0).$$

Sugerencia: En lugar de la ecuación diferencial (i) consideramos la ecuación integral equivalente

$$\text{(v)} \qquad y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y)\, dx.$$

A cada elemento g del espacio de las funciones continuas $\mathcal{E}^{\mathcal{J}}$, en donde $\mathcal{J}$ designa el intervalo cerrado $x_0 - \delta, x_0 + \delta$, le asignaremos la función h_g de variable x definida como sigue:

$$\text{(vi)} \qquad h_g(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, g(t))dt.$$

Utilizando (ii) demostraremos que para un $\delta > 0$ suficientemente pequeño se verifica la desigualdad

$$|h_{g_1} - h_{g_2}| \leq k|g_1 - g_2|, \qquad \text{en donde} \qquad 0 < k < 1.$$

Entonces, aplicando el Teorema de Banach (Ejercicio 6) al espacio $\mathcal{E}^{\mathcal{J}}$ deducimos que existe exactamente una función g que satisface $h_g = g$; es una solución de la ecuación (v), y por consiguiente también de la ecuación (i), y satisface la condición (iv).

8. *Teorema de las funciones implícitas.* Sea g una función de dos variables x e y con una derivada parcial con respecto a y, continua en algún rectángulo con centro $\langle x_0, y_0 \rangle$; sea también

$$g(x_0, y_0) = 0 \quad \text{y} \quad g'_y(x_0, y_0) \neq 0.$$

Entonces existe una y sólo una función f continua en un entorno del punto x_0 tal que

$$g(x, f(x)) = 0 \quad \text{y} \quad f(x_0) = y_0;$$

dicho de otra forma, la curva $E_{x,y}[g(x, y) = 0]$ es localmente, en el punto $\langle x_0, y_0 \rangle$, la gráfica de una función.

Redúzcase la demostración, por medio de la substitución

$$h(x, y) = y - y_0 - g(x, y)/g'_y(x_0, y_0),$$

al siguiente teorema:

Sea h una función de las variables x e y, que es continua y tiene derivada parcial continua respecto a y en un cuadrado K con centro $\langle x_0, y_0 \rangle$ y de lado $2d$; sea también

$$h(x_0, y_0) = 0 = h'_y(x_0, y_0).$$

Entonces, existe una y sólo una función f continua en un entorno del punto x_0, tal que

(vii) $$f(x) = h(x, f(x)) + y_0 \quad \text{y} \quad f(x_0) = y_0.$$

Esquema de la demostración. Podemos suponer que el número d es tan pequeño que

$$|h'_y(x, y)| < {}^1/_2 \quad \text{para} \quad (x, y) \in K.$$

Designamos por I_1 un intervalo cerrado con centro en x tan pequeño que

$$h(x, y_0) < {}^1/_2\, d \quad \text{para} \quad x \in I_1.$$

Sea $I_2 = E_y(|y - y_0| < d)$.

Asignemos a cada función $f \in I_2^{I_1}$ que satisfaga la condición $f(x_0) = y_0$, la función F_f de variable x definida del modo siguiente:

$$F_f(x) = y_0 + h(x, f(x)) \quad \text{para} \quad x \in I_1$$

Obtenemos

$$\begin{aligned} |F_{f_1}(x) - F_{f_2}(x)| &= |h(x, f_1(x)) - h(x, f_2(x))| \\ &= |f_1(x) - f_2(x)| \cdot |h'_y(x, z_x)| \leqslant \tfrac{1}{2}|f_1(x) - f_2(x)|, \end{aligned}$$

donde $f_1(x) < z_x < f_2(x)$.

De esto deducimos que

$$|F_{f_1} - F_{f_2}| \leqslant \tfrac{1}{2}|f_1 - f_2|.$$

Al mismo tiempo $F_f \in I_2^{I_1}$, lo que demostramos fácilmente utilizando la desigualdad $|h(x, y)| \leqslant |h(x, y) - h(x, y_0)| + h(x, y_0)$. Finalmente $F_f(x_0) = y_0$.

Por tanto podemos aplicar el Teorema de Banach. De esto se sigue que existe una función f tal que $F_f = f$, esto es que satisface la condición (vii).

9. Demostrar que para cada espacio métrico no compacto hay una función real acotada que no alcanza su cota superior mínima.

Sugerencia: Usar el teorema de extensión de Tietze.

10. Demostrar que un espacio compacto no puede ser isométrico a ninguno de sus subconjuntos propios.

11. Demostrar que un espacio $\mathcal{T}_2$ bicompacto es normal.

Sugerencia: Utilícese un método similar al empleado en la demostración del Teorema 1, apartado 9.

12. Sean X e Y dos espacios métricos. Demostrar que el conjunto Y^X de todas las aplicaciones continuas de X en Y se puede considerar como un espacio topológico definiendo el cierre $\overline{\Phi}$ de $\Phi \subset Y^X$ como sigue:

$$(f \in \overline{\Phi}) = [(f|F) \in \overline{\Phi|F}] \quad \text{para cada compacto} \quad F \subset X.$$

estando definida la topología de Y^F como en el apartado 6, fórmula (39), y designando $\Phi|F$ el conjunto de los elementos de Φ restringidos a F.

Mostrar que en el caso en que X sea un subconjunto abierto de un espacio compacto, f pertenece a $\overline{\Phi}$ sí, y sólo sí, existe una sucesión de funciones $f_1, f_2, \ldots$ en Φ convergente uniformemente hacia f en todo subconjunto compacto de X.

CAPÍTULO **16**

Espacios conexos

16.1. Espacios conexos

DEFINICIONES. Se dice que un espacio X es *conexo* si no contiene ningún subconjunto A tal que, simultáneamente,

(1) $$\emptyset \neq A \neq X$$

y

(2) $$\overline{A} \cap \overline{X - A} = \emptyset.$$

Esto significa que un espacio es conexo sí y sólo si todo subconjunto propio no-vacío tiene una frontera no vacía.

Señalemos que un conjunto A que satisfaga la condición (2) es cerrado, pues entonces tenemos que $\overline{A} \cap (X - A) = \emptyset$, por tanto $\overline{A} \subset A$, esto es, $\overline{A} = A$. Este conjunto es también abierto por ser cerrado el $X - A$. De esto se sigue que el espacio es conexo sí, y sólo sí, sus únicos subconjuntos simultáneamente cerrados y abiertos son el nulo y el espacio completo.

La conexión de un espacio se puede definir también de la forma siguiente.

Teorema 1. *Un espacio X es conexo sí, y sólo sí, para toda descomposición*

(3) $$X = A \cup B$$

en dos conjuntos cerrados no vacíos A y B, se satisface la condición

(4) $$A \cap B \neq \emptyset.$$

Con otras palabras, *un espacio es conexo sí, y sólo sí, no se puede representar como la unión de dos conjuntos no vacíos, disjuntos y cerrados.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que el espacio X no es conexo. Sea A un conjunto A que satisface las condiciones (1) y (2).

Los conjuntos A y $B = X - A$ son entonces no vacíos y cerrados, y satisfacen la condición (3), pero no la (4).

A continuación, supongamos que los conjuntos A y B son cerrados y no vacíos y que satisfacen la condición (3), pero no la condición (4), es decir, que

(5) $$A \cap B = \emptyset.$$

De (3) y (5) se sigue que $X - A = B$ y, por tanto

$$\overline{A} \cap \overline{X - A} = \overline{A} \cap \overline{B} = A \cap B = \emptyset.$$

Además, $A \neq X$, ya que $B \neq \emptyset$ y $B = X - A$. Por tanto el conjunto A satisface (1) y (2), esto es, el espacio X no es conexo.

Nota. La condición impuesta en el Teorema 1 se puede formular del modo siguiente: un espacio es conexo si para cada una de sus descomposiciones en dos conjuntos A y B no vacíos al menos uno de esos conjuntos contiene un punto que pertenece a la clausura del otro conjunto, esto es, si existe un punto p de la forma $p = \lim_{n \to \infty} p_n$, donde $p \in A$ y $p_n \in B$ o bien $p \in B$ y $p_n \in A$).

Esta condición nos permite una formulación conveniente de la definición de conjunto conexo.

Se dice que un conjunto es conexo si este conjunto, considerado como espacio, forma un espacio conexo. Por tanto, *un conjunto C es conexo si para cada una de sus descomposiciones en dos conjuntos A y B no vacíos:*

(6) $$C = A \cup B$$

tenemos que

(7) $$(\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \neq \emptyset.$$

Dicho de otra forma, si decimos que dos conjuntos A y B son *separados*, cuando satisfacen la igualdad

(8) $$(\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = \emptyset,$$

podemos decir que el conjunto C es conexo si no puede descomponerse en dos conjuntos separados no vacíos.

Vamos a demostrar diversas propiedades de los conjuntos separados que serán muy útiles más adelante.

Teorema 2. *Si los conjuntos A y B son separados $A_1 \subset A$ y $B_1 \subset B$ entonces los conjuntos A_1 y B_1 son separados.*

Esto es cierto porque

$$(\overline{A}_1 \cap B_1) \cup (A_1 \cap \overline{B}_1) \subset (\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = \emptyset.$$

Teorema 3. *Si los conjuntos A y B son separados, y lo son también los conjuntos A y C, entonces los conjuntos A y $B \cup C$ son separados.*

Esto se sigue de la fórmula

$$[\overline{A} \cap (B \cup C)] \cup [A \cap \overline{B \cup C}] =$$
$$= (\overline{A} \cap B) \cup (\overline{A} \cap C) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap \overline{C}) = \emptyset.$$

Teorema 4. *Si los conjuntos A y B son cerrados, o ambos abiertos, entonces los conjuntos $A - B$ y $B - A$ son separados.*

DEMOSTRACIÓN. Tenemos que

$$\overline{A - B} \cap (B - A) = \overline{A \cap (X - B)} \cap B \cap (X - A)$$
$$\subset \overline{A} \cap \overline{X - B} \cap B \cap (X - A).$$

Si $\overline{A} = A$, entonces

$$\overline{A} \cap \overline{X - B} \cap B \cap (X - A) \subset A \cap (X - A) = \emptyset.$$

Si el conjunto B es abierto, esto es, si el $X - B$ es cerrado, entonces

$$\overline{A} \cap \overline{X - B} \cap B \cap (X - A) \subset (X - B) \cap B = \emptyset.$$

De modo análogo demostramos que bajo nuestras hipótesis

$$(A - B) \cap \overline{B - A} = \emptyset$$

y por tanto los conjuntos $A - B$ y $B - A$ son separados.

16.2. Propiedades de los espacios conexos

Teorema 1. *La imagen en una aplicación continua de un espacio conexo es un espacio conexo; dicho de otra forma, la conexión es un invariante respecto a las transformaciones continuas.*

DEMOSTRACIÓN. Sea f una aplicación continua del espacio X y sea $f(X) = Y$. Supongamos que el espacio Y no es conexo. Demostraremos que entonces el espacio X no es conexo.

Así sean A y B conjuntos cerrados no vacíos tales que, simultáneamente,

(9) $$A \cup B = Y$$

y

(10) $$A \cap B = \emptyset.$$

Entonces en virtud de (9) (cfr. Capítulo 4.4 (16)):

$$f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) = f^{-1}(Y) = X.$$

Los conjuntos $f^{-1}(A)$ y $f^{-1}(B)$ son no vacíos y por ser continua la función f son también cerrados (véase Capítulo 12.2 Teorema 1); utilizando (10) (cfr. Capítulo 4.4 (17)), tenemos

$$f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = f^{-1}(A \cap B) = \emptyset.$$

Por tanto, el espacio X se ha descompuesto en dos conjuntos cerrados no vacíos disjuntos. Por tanto, el espacio X no es conexo.

Notas. Los únicos subconjuntos conexos del espacio de los números reales (aparte del espacio completo, el conjunto vacío y puntos aislados) son: los rayos abiertos o cerrados, esto es conjuntos de la forma

$$E_x(x \leqslant a), \quad E_x(x < a), \quad E_x(x \geqslant a) \quad E_x(x > a),$$

intervalos abiertos o cerrados, y, finalmente, conjuntos de la forma

$$E_x(a < x \leqslant b), \quad \text{y} \quad E_x(a \leqslant x < b).$$

Pues, si el conjunto A no es de una de estas formas, entonces existen un número $d \notin A$ y números $x_1, x_2 \in A$ tales, que $x_1 < d < x_2$. Entonces el conjunto A es la reunión de dos conjuntos M y N no vacíos contenidos en los conjuntos separados

$$E_x(x < d) \quad \text{y} \quad E_x(x > d),$$

respectivamente, y por tanto A es la reunión de dos conjuntos separados no vacíos, esto es, no es conjunto conexo.

Sea f ahora una función real continua definida en el espacio conexo X. El conjunto $f(X)$ es entonces, por el Teorema 1, un subconjunto conexo del conjunto de los números reales y, por tanto, es uno de los conjuntos que indicamos arriba.

De esto se sigue que si $y_1 \in f(X)$, $y_2 \in f(X)$ e $y_1 < y_2$, entonces todo el intervalo $y_1 \leqslant y \leqslant y_2$ está contenido en el conjunto $f(X)$, o, dicho de otra forma, si $y_1 \leqslant y \leqslant y_2$, entonces $y \in f(X)$. Esto significa que la función f tiene la *propiedad de Darboux*, es decir, adquiere todos los valores intermedios al pasar de un valor a otro. Así hemos demostrado la siguiente propiedad de los espacios conexos:

Teorema 2. *Toda función real continua definida en un espacio conexo posee la propiedad de Darboux.*

Señalamos además que esta propiedad es característica de los espacios conexos; pues si un espacio X no es conexo y A y B son dos conjuntos cerrados disjuntos no vacíos tales que $A \cup B = X$, entonces la función característica del conjunto A, esto es, la función definida por las condiciones

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{para} \quad x \in A, \\ 0 & \text{para} \quad x \in B, \end{cases}$$

es una función real continua definida en el espacio X y que no tiene la propiedad de Darboux.

Teorema 3. *Si C es conexo y* $C \cap A \neq \emptyset \neq C - A$, *entonces*

$$C \cap \mathrm{Fr}(A) \neq \emptyset.$$

Con otras palabras, *si un conjunto conexo C tiene puntos comunes con el conjunto A y también con su complemento, entonces tiene también puntos comunes con la frontera del conjunto A.*

Demostración. En virtud de la conexión del conjunto C y de la igualdad $C = (C \cap A) \cup (C - A)$, los conjuntos $C \cap A$ y $C - A$ no son separados, esto es,

(11) $$[\overline{C \cap A} \cap (C - A)] \cup [\overline{C - A} \cap C \cap A] \neq \emptyset.$$

esto es,

$$C \cap [(\overline{C \cap A} \cap (X - A)) \cup (\overline{C - A} \cap A)] \neq \emptyset.$$

Tenemos también

$$\overline{C \cap A} \subset \overline{A}, \qquad X - A \subset \overline{X - A}, \qquad \overline{C - A} \subset \overline{X - A}, \qquad A \subset \overline{A}.$$

Por tanto, por (11) tenemos

$$\emptyset \neq C \cap \overline{A} \cap \overline{X - A} = C \cap \mathrm{Fr}(A).$$

Teorema 4. *Si el conjunto C es conexo, y* $C \subset M \cup N$ *y los conjuntos M y N son separados, entonces* $C \subset M$ *o* $C \subset N$.

Demostración. Los conjuntos $C \cap M$ y $C \cap N$ son separados (véase Teorema 2, apartado 1) y $(C \cap M) \cup (C \cap N) = C$. Por tanto, por la conexión del conjunto C, uno de estos dos conjuntos es vacío. Si $C \cap N = \emptyset$, entonces $C = C \cap M$, esto es $C \subset M$. Análogamente, si $C \cap M = \emptyset$, entonces $C \subset N$.

Teorema 5. *Si los conjuntos C y D son conexos y no son separados, su reunión es conexa.*

Demostración. Sea $C \cup D = M \cup N$, donde los conjuntos M y N son separados. Tenemos que demostrar que uno de ellos es vacío. Por el Teorema 4 podemos suponer que $C \subset M$. Análogamente, $D \subset M$ o $D \subset N$. La inclusión $D \subset N$ no se verifica, porque entonces los conjuntos C y D serían separados (en virtud del Teorema 2, apartado 1), en contra de la hipótesis. Por tanto $D \subset M$, de donde $C \cup D \subset M$ y por tanto $N = \emptyset$.

El teorema 5 puede generalizarse del modo siguiente.

Teorema 6. *Si* $\{C_t\}$ *es una familia de conjuntos conexos y si uno de estos,* C_{t_0}, *es no separado de alguno de los restantes conjuntos, entonces la reunión* $S = \bigcup_t G_t$ *es un conjunto conexo.*

Demostración. Sea $S = M \cup N$, donde los conjunto M y N son separados. Mostraremos que $M = \emptyset$ o $N = \emptyset$.

En virtud del Teorema 4, podemos suponer que $C_{t0} \subset M$. Como los conjuntos C_{t0} y C_t no son separados para ningún t, deducimos del Teorema 5 que los conjuntos $C_{t0} \cup C_t$ son conexos, y por tanto $C_{t0} \cup C_t \subset M$ para todo t, de donde $S \subset M$ y por tanto $N = \emptyset$.

Nota. Se deduce inmediatamente del Teorema 6 que *si $\{C_t\}$ es una familia de conjuntos conexos y $\bigcap_t C_t \neq \emptyset$, entonces el conjunto $\bigcup_t C_t$ es conexo.*

Teorema 7. *Si el conjunto C es conexo y $C \subset A \subset \overline{C}$, entonces el conjunto A es también conexo.*

En particular, *la clausura de un conjunto conexo es conexo.*

Este teorema, se sigue del teorema precedente, siendo C_{t0} el conjunto C y los conjuntos de la familia $\{C_t\}$, $t \neq t_0$, los conjuntos $\{x\}$ de un elemento donde $x \in A$. Ninguno de los conjuntos $\{x\}$ es separado de C porque $x \in \overline{C}$. Por tanto, el conjunto $C \cup \bigcup_x \{x\} = A$ es conexo.

Teorema 8. *Si C es un subconjunto conexo del espacio conexo* X *y*

(12) $$\mathrm{X} - C = M \cup N$$

donde los conjuntos M y N son separados, entonces los conjuntos $C \cup M$ y $C \cup N$ son conexos.

Además, si el conjunto C es cerrado, entonces los conjuntos $C \cup M$ y $C \cup N$ son también cerrados.

Demostración. Supongamos que

(13) $$C \cup M = A \cup B,$$

donde los conjuntos A y B son separados. Tenemos que mostrar que $A = \emptyset$ o $B = \emptyset$.

Como tenemos $C \subset A \cup B$ (en virtud de (13)), podemos, además, suponer, por el Teorema 4, que $C \subset B$. De esto se sigue (véase Teorema 2, apartado 1), que los conjuntos A y C son separados y en particular $A \cap C = \emptyset$. Pero como $A \subset C \cup M$, tenemos que $A \subset M$, y por ser separados los conjuntos M y N, los conjuntos A y N son también separados. El conjunto A es, pues, separado de B, así como de N; es, por lo tanto, separado de $B \cup N$ (véase Teorema 3, apartado 1).

Por otra parte, por (12) y (13) tenemos

(14) $$\mathrm{X} = C \cup M \cup N = A \cup B \cup N = A \cup (B \cup N).$$

El espacio X es, por tanto, la unión de dos conjuntos separados A y $B \cup N$. Como el espacio es conexo, uno de estos dos conjuntos tiene que ser vacío. Por tanto, o bien $A = \emptyset$ o $B \cup N = \emptyset$, de donde $B = \emptyset$.

Si, además, $C = \overline{C}$, entonces, por (14):

$$\overline{C \cup M} = C \cup \overline{M} = C \cup [\overline{M} \cap (C \cup M \cup N)]$$
$$= C \cup M \cup (\overline{M} \cap N) = C \cup M,$$

ya que $\overline{M} \cap N = \emptyset$ (M y N son separados).

Por tanto el conjunto $C \cup M$ es cerrado.

El mismo argumento demuestra que el conjunto $C \cup N$ es conexo y cerrado.

16.3. Componentes

Componente de un punto p es, por definición, la unión de todos los conjuntos conexos que contienen el punto p.

Teorema 1. *Toda componente es un conjunto conexo.*

Además, una componente S es un conjunto conexo *maximal*, esto es, *si C es un conjunto conexo*, entonces

(15) $$(S \subset C) \Rightarrow (C = S).$$

Demostración. Sea S la componente del punto p. Por lo tanto, S es de la forma

$$S = \bigcup_t C_t,$$

donde C_t es un conjunto conexo que contiene el punto p. En virtud del Teorema 6 (véase Nota al Teorema 6, apartado 2) S es un conjunto conexo.

Además, si $S \subset C$, entonces $p \in C$, y por tanto C es de la forma $C = C_t$. donde $C \subset S$. Por lo tanto $C = S$.

Teorema 2. *Toda componente S es un conjunto cerrado.*

Demostración. Por el Teorema 7 apartado 2 el conjunto $\overline{S}$ es conexo. Pero como $S \subset \overline{S}$ tenemos, utilizando (15), $\overline{S} = S$.

Teorema 3. *Dos componentes distintas son siempre separadas.*

Demostración. Si las componentes S_1 y S_2 no son separadas, entonces el conjunto $S_1 \cup S_2$ es conexo (véase Teorema 5, apartado 2), y, por tanto, $S_1 \cup S_2 \subset S_1$ y $S_1 \cup S_2 \subset S_2$, esto es, $S_1 = S_2$.

Ejemplo. Designamos por I_n el segmento (situado en el plano) consistente en los puntos $\langle x, y \rangle$ tales que $x = 1/n$, $0 < y < 1$ para $n = 1, 2, \ldots$ Designamos por I_0 el segmento $x = 0 < y < 1$. Sea $A = I_0 \cup I_1 \cup I_2 \cup \ldots$ Las componentes del espacio A son segmentos $I_m (m \geqslant 0)$. Señalamos que la componente I_0 no es un conjunto abierto en el espacio considerado.

Teorema 4. *Si A es un subconjunto conexo de un espacio conexo X y C es una componente del conjunto X — A, entonces el conjunto X — C es conexo.*

Demostración. Sea $X - C = M \cup N$, donde los conjuntos M y N son separados. Mostraremos que $M = \emptyset$, o bien, $N = \emptyset$.

Por hipótesis, tenemos que $C \subset X - A$ y por tanto,

(16) $$A \subset X - C = M \cup N.$$

Podemos suponer (ver Teorema 4, apartado 2) que $A \subset M$, de donde $A \cap N = \emptyset$. Por verificarse

$$A \cap (C \cup N) = (A \cap C) \cup (A \cap N) = \emptyset,$$

tenemos que $C \cup N \subset X - A$, de donde

(17) $$C \subset C \cup N \subset X - A.$$

Por ser C una componente del conjunto $X - A$, y el conjunto $C \cup N$ conexo (por el Teorema 8, apartado 2), la fórmula (17) nos conduce a $C = C \cup N$ (cfr. (15)). Se sigue que $N \subset C$. Como, por (16), tenemos $N \subset X - C$, resulta $N = \emptyset$.

EJERCICIOS

1. Demostrar que si los espacios X e Y son conexos, el producto cartesiano $X \times Y$ es también un espacio conexo.

Sugerencia: Obsérvese que para todo punto $y \in Y$ el conjunto $X \times \{y\}$ es conexo y utilícese luego el Teorema 5, apartado 2).

Generalizar este teorema al producto cartesiano de una familia numerable de espacios.

2. Demostrar que todo espacio conexo que contiene más de un punto tiene por lo menos la potencia del continuo.

3. Demostrar que el espacio euclídeo $\mathcal{E}^n (n > 1)$ permanece conexo después de quitarle un conjunto numerable de puntos.

Sugerencia: Sea N un conjunto numerable de puntos del espacio y $p, q \in \mathcal{E}^n - N$. Además, sea L una recta que no pase por los puntos p y q. Indicar que sobre L siempre existe un punto x tal que los segmentos px y qx son disjuntos del conjunto N.

4. Sean dos conjuntos A y B tales que o los dos son cerrados o los dos son abiertos. Mostrar que si los conjuntos $A \cup B$ y $A \cap B$ son conexos, entonces los conjuntos A y B son también conexos.

Sugerencia: Utilícese el Teorema 8, apartado 2, haciendo $X = A \cup B$, $C = A \cap B$, $M = A - B$, $N = B - A$, y el Teorema 4, apartado 1.

5. Sea

$$X = \bigcup_t G_t$$

un recubrimiento dado abierto del espacio conexo X.

Demostrar que todo par de puntos $\langle a, b \rangle$ del espacio X puede unirse por medio de una cadena consistente en conjuntos G_t, esto es, que existe un sistema finito de índices $t_1, t_2, \ldots, t_n$ tal que

$$a \in G_{t_1}, \quad G_{t_1} \cap G_{t_2} \neq \emptyset, \quad \ldots, \quad G_{t_{n-1}} \cap G_{t_n} \neq \emptyset, \quad b \in G_{t_n}.$$

Sugerencia: Sea Z el conjunto de todos los puntos que pueden unirse por medio de una cadena con el punto a. Demostrar que el conjunto Z es abierto-cerrado.

6. Decimos que el espacio X es *conexo entre los conjuntos* A y B, si el espacio no puede descomponerse en dos conjuntos cerrados disjuntos uno de los cuales contenga a A y el otro contenga a B. Demostrar que si hay un sistema de conjuntos $A_0, \ldots, A_n$ tal que el espacio no es conexo entre ningún par A_i, A_j (para $i \neq j$), existe un sistema de conjuntos cerrados disjuntos $F_0, \ldots, F_n$ que satisface las condiciones

$$X = F_0 \cup \ldots \cup F_n, \qquad A_i \subset F_i \qquad \text{para} \qquad i = 0, \ldots, n.$$

7. Demostrar que la relación

$p\varrho q$ = *(el espacio X es conexo entre los puntos p y q)*

es una relación de equivalencia (cfr. Ejercicio 9, Capítulo 5).

8. Los conjuntos de equivalencia determinados por la relación antedicha se llaman *quasi-componentes* del espacio.

Demostrar que:

1. Toda quasi-componente es la intersección de todos los conjuntos abiertos-cerrados que contienen un punto dado.

2. Toda componente del espacio está contenida en una quasi-componente, pero la recíproca no es cierta.

3. Si X es cônexo entre x_1 y x_2, e Y es conexo entre y_1 e y_2, entonces $X \times Y$ es conexo entre $\langle x_1, y_1 \rangle$ y $\langle x_2, y_2 \rangle$.

4. Generalizar la última proposición para el caso de un producto cartesiano de n factores.

9. Sea A un subconjunto de un espacio métrico. Mostrar la equivalencia: *(A es conexo entre p y q)* = *(todo G abierto que contiene a A es conexo entre p y q)*.

Sugerencia: Utilícese el teorema enunciado en el Ejercicio 15, Capítulo 12.

10. Demostrar que la relación ϱ definida en el Ejercicio 7 es cerrada (cfr. Ejercicio 18, Capítulo 11).

Mostrar que el teorema anterior no es válido para la relación « x e y pertenecen a un subconjunto conexo del espacio » (construir el espacio que tenga la propiedad requerida en el plano).

11. Demostrar que un espacio conexo, métrico y localmente separable es separable.

CAPÍTULO **17**

Continuos

17.1. Continuos

DEFINICION Y EJEMPLOS. *Un continuo* es un espacio compacto y conexo.

Por ejemplo, un intervalo cerrado es un continuo. Otros ejemplos de continuo son un círculo con su frontera y el cubo cerrado n-dimensional.

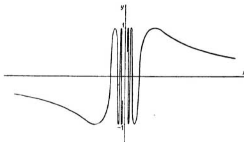


FIG. 9

El conjunto S de puntos en el plano definido por las siguientes ecuaciones

$$(1) \qquad \begin{cases} y = \text{sen}\,(1/x) & \text{para} \quad 0 < x < 1 \\ -1 \leq y \leq 1 & \text{para } x = 0 \end{cases}$$

es un continuo (véase fig. 9).

El conjunto consistente en un sólo punto y el conjunto vacío son evidentemente continuos; los intervalos cerrados son los otros únicos conjuntos que son continuos en la recta real.

17.2. Propiedades de los continuos

Los cinco siguientes teoremas son consecuencias inmediatas de los correspondientes teoremas en los Capítulos 15 y 16 (que se especifican en paréntesis).

Teorema 1. *La unión de dos continuos que tienen un punto común es un continuo* (cfr. Capítulo 16.2, Teorema 5).

Teorema 2. *Si el espacio X es un continuo, C es un continuo contenido en X, y $X - C$ es la unión de dos conjuntos disjuntos M y N, entonces los conjuntos $C \cup M$ y $C \cup N$ son continuos* (cfr. Capítulo 16.2, Teorema 8).

Teorema 3. *La imagen continua de un continuo es un continuo* (cfr. Capítulo 16.2, Teorema 1).

En particular, *si C es un continuo no vacío y f es una función continua real definida en C, entonces $f(C)$ es o un punto o un intervalo cerrado.*

Esto es una generalización del conocido Teorema del Análisis, según el cual una función continua definida en un intervalo cerrado alcanza sus extremos y pasa por todos los puntos intermedios.

Teorema 4. *El producto cartesiano de un número finito de continuos es un continuo* (cfr. Capítulo 16.5, Teorema 1, y Capítulo 16, Ejercicio 1).

En general, *si C_m es un continuo para $m = 1, 2, \ldots$, entonces $C_1 \times C_2 \times \ldots$ es un continuo.*

En particular, el cubo $\mathcal{I}^n$ y el cubo de Hilbert $\mathcal{H}$ son continuos.

Teorema 5. *Toda componente de un espacio compacto es un continuo* (cfr. Capítulo 16.3, Teoremas 1 y 2).

Ahora probaremos los siguientes teoremas.

***Teorema 6.** *Si A y B son dos componentes distintas de un espacio compacto X, entonces X se puede descomponer en dos conjuntos cerrados disjuntos F y K que contienen los conjuntos A y B, respectivamente:*

$$X = F \cup K, \qquad F \cap K = \emptyset, \qquad A \subset F \quad \text{y} \quad B \subset K.$$

Con otras palabras, *existe un conjunto abierto-cerrado F que satisface las condiciones $A \subset F$ y $F \cap B = \emptyset$* (por supuesto, podemos tomar $K = X - F$).

Basaremos la demostración en el siguiente lema:

LEMA. *La intersección C de todos los subconjuntos abierto-cerrados de un espacio compacto, que contienen un punto dado p, es conexa.*

Demostración. Supongamos lo contrario. En este caso sean P y Q dos conjuntos cerrados tales que

(2) $$C = P \cup Q,$$

(3) $$P \cap Q = \emptyset,$$

(4) $$P \neq \emptyset \neq Q,$$

(5) $$p \in P.$$

En virtud de (3) y del hecho de que el espacio es normal (cfr. Cap. 12.7, Teorema 6), existen dos conjuntos abiertos G y H tales que

(6) $$P \subset G, \quad Q \subset H \quad \text{y} \quad G \cap H = \emptyset.$$

Por tanto, poniendo $G^c = X - G$ y $H^c = X - H$, tenemos

(7) $$P \cap G^c = \emptyset,$$

(8) $$Q \cap H^c = \emptyset,$$

(9) $$X = G^c \cup H^c$$

donde los conjuntos G^c y H^c son cerrados.

Sea

(10) $$D_1, D_2, \ldots, D_n, \ldots$$

la sucesión de todos los conjuntos abierto-cerrados que contienen el punto p (cfr. Cap. 15.3, Teorema 4). De la definición del conjunto C tenemos

(11) $$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} D_n.$$

Sea

(12) $$E_n = D_1 \cap D_2 \cap \ldots \cap D_n.$$

Las fórmulas (11) y (12) conducen inmediatamente a

(13) $$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$$

y

(14) $$E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \ldots \supset E_n \supset \ldots$$

Pongamos $F_n = E_n \cap G^c \cap H^c$. Entonces, por (13), obtenemos

(15) $$\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) \cap G^c \cap H^c = C \cap G^c \cap H^c = \emptyset,$$

pues de las fórmulas (2) y (6) deducimos que $C = (P \cup Q) \subset (G \cup H)$.

Al mismo tiempo, los conjuntos F_n forman una sucesión decreciente (cfr. 14) y son cerrados (cfr. 12). Por tanto, si fuesen no-vacíos, entonces, por el Teorema de Cantor (Cap. 15.3, Teorema 1) su intersección no sería vacía, en contra de (15). Por tanto, existe un índice n tal que $F_n = \emptyset$, esto es, tal que

(16) $$E_n \cap G^c \cap H^c = \emptyset, \quad \text{esto es} \quad E_n \cap H^c \subset G.$$

El conjunto $E_n \cap G$ es abierto-cerrado. Evidentemente es un conjunto abierto, por ser la intersección de dos conjuntos abiertos. Es también cerrado porque, por (9) y (16), tenemos

(17) $$E_n \cap G = E_n \cap G \cap (G^c \cup H^c) = E_n \cap H^c$$

y el conjunto $E_n \cap H$ es la intersección de dos conjuntos cerrados.

Como el conjunto abierto-cerrado $E_n \cap G$ contiene el punto p (cfr (5) y (6)), es uno de los términos de la sucesión (10): $E_n \cap G = D_k$. Por tanto, por (11) y (17), tenemos

$$C \subset D_k = E_n \cap G = E_n \cap H^c \subset H^c$$

de donde por (2)

$$Q \subset C \subset H^c, \quad \text{o sea,} \quad Q = Q \cap H^c = \emptyset$$

por (8). Pero esto contradice la desigualdad (4).

Demostración del Teorema 6. Sea $p \in A$ y sea C (como en el lema) la intersección de todos los conjuntos abierto-cerrados que contienen el punto p. Cada uno de estos conjuntos, contiene, evidentemente, el conjunto A, por ser A conexo (cfr. Cap.16.2, Teorema 4); y por tanto,

(18) $$A \subset C.$$

Por ser C conexo A es un componente del espacio, la inclusión (18), conduce a la igualdad

(19) $$C = A$$

[cfr. Cap. 16.3 (15)].

Si todo conjunto abierto-cerrado que contiene a A contiene también a B, en contra de la hipótesis del Teorema 6, entonces tendríamos $B \subset C$, de donde $B \subset A$ (cfr. (19)). Pero esto es imposible, por ser disjuntos los componentes (véase Capítulo 16.3, Teorema 3). Por tanto, existe un conjunto cerrado F tal que $A \subset F$ y $B - F \neq \emptyset$. Por ser el conjunto B conexo, la última desigualdad conduce a $F \cap B = \emptyset$.

Corolario. *Para todo espacio compacto existe una aplicación continua de este espacio en un subconjunto del conjunto de Cantor que aplica dos componentes distintos en dos puntos distintos del conjunto de Cantor.*

Demostración. Sea $D_1, D_2, \ldots$ la sucesión de todos los subconjuntos cerrados del espacio dado. Definiremos la función f del modo siguiente:

$$f(x) = t_1/3 + t_2/9 + \ldots + t_n/3^n + \ldots$$

donde $t_n = 2$ si $x \in D_n$, y $t_n = 0$ si $x \notin D_n$ (esta se llama la *función característica* de la sucesión $D_1, D_2, \ldots$).

Por tanto los valores de la función f son puntos del conjunto de Cantor.

Como el conjunto D_n es cerrado-abierto, una función que tome el valor 2 en él y el valor 0 en su complemento es continua. De esto se deduce fácilmente que la función f es continua.

Finalmente, si A y B son dos componentes distintas, en virtud del Teorema 6 existe un n tal que $A \subset D_n$, y $B \cap D_n = \emptyset$; y por tanto, tenemos $t_n = 2$ para $x \in A$ y $t_n = 0$ para $x \in B$. Por tanto los valores de la función en los conjuntos A y B son distintos.

Añadamos que toda componente se aplica así sobre algún punto (correspondiendo a distintas componentes distintos puntos); esto es una consecuencia del hecho de que la imagen continua de un conjunto conexo es conexa, y el conjunto de Cantor no contiene otros conjuntos conexos no vacíos que los constituidos por un solo punto.

***Teorema 7.** *La intersección de una sucesión decreciente de continuos es un continuo.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $C_n (n = 1, 2, \ldots)$ continuos tales que

(20) $$C_1 \supset C_2 \supset \ldots \supset C_n \supset \ldots$$

y

(21) $$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n.$$

Supongamos que C no es un continuo. Entonces existirán dos conjuntos cerrados P y Q que satisfacen las condiciones (2)-(4). Sean G y H dos conjuntos abiertos que satisfacen la condición (6) y, por tanto, las condiciones (7)-(9). Pongamos

(22) $$F_n = C_n \cap G^c \cap H^c.$$

Entonces, por (22) y (21), tenemos

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n\right) \cap G^c \cap H^c = C \cap G^c \cap H^c,$$

pues las fórmulas (2) y (6) conducen a $C = (P \cup Q) \subset (G \cup H)$.

Del hecho de que los conjuntos F_n forman una sucesión decreciente y son cerrados [por (20)], deducimos (usando el Teorema de Cantor) que no todos estos conjuntos son no-vacíos, esto es, que $F_n = \emptyset$ para algún n, esto es,

(23) $$C_n \cap G^c \cap H^c = \emptyset.$$

Al mismo tiempo, por (9), tenemos

(24) $$C_n \subset G^c \cup H^c, \quad \text{esto es,} \quad C_n = (C_n \cap G^c) \cup (C_n \cap H^c).$$

De las fórmulas (23) y (24) se sigue que C_n es la reunión de los conjuntos cerrados disjuntos $C_n \cap G^c$ y $C_n \cap H^c$. Como C_n es un continuo, uno de estos dos conjuntos es vacío. Sea, por ejemplo, $C_n \cap G^c = \emptyset$, esto

es, $C_n \subset G$, y, por tanto, por (2) y (21), $Q \subset C \subset C_n \subset G$, es decir, $Q \subset G$, de donde por (6) tenemos que $Q \subset G \cap H = \emptyset$. De esta forma hemos llegado a la conclusión de que $Q = \emptyset$, en contra de (4).

EJERCICIOS

1. Demostrar que para todo par de puntos a y b en un continuo C y para todo $\varepsilon > 0$, existe en C una sucesión finita de puntos

$$a = p_0, p_1, \ldots, p_n = b$$

tal que $|p_{i-1} - p_i| < \varepsilon$ para $i = 1, 2, \ldots, n$. Mostrar que esta propiedad distingue al continuo de todos los demás espacios compactos (definición de Cantor).

2. Mostrar por medio de un ejemplo que en el Teorema 7 es esencial hacer la hipótesis de compacidad: la intersección de una sucesión decreciente de conjuntos conexos cerrados puede no ser conexa.

CAPÍTULO **18**

Espacios localmente conexos

18.1. Espacios localmente conexos

Definición. Decimos que un espacio es *localmente conexo en el punto* p si para todo número $\varepsilon > 0$ existe un conjunto conexo E tal que

$$p \in \operatorname{Int}(E) \quad \text{y} \quad \delta(E) < \varepsilon.$$

Se dice que un espacio es *localmente conexo* si es localmente conexo en cada uno de sus puntos.

Podemos también decir que los espacios localmente conexos en un punto p son aquéllos en que todo entorno del punto p contiene un entorno conexo de este punto.



FIG. 10

EJEMPLOS. 1. El conjunto de todos los números reales, el espacio euclídeo n-dimensional, y el cubo n-dimensional son espacios localmente conexos.

2. El conjunto S definido en el Capítulo 17.1 (1), no es localmente conexo en los puntos de este conjunto situados en el eje y.

3. El conjunto llamado *escoba de barrer*, esquematizado en la figura 10, no es localmente conexo.

Obtenemos tal conjunto uniendo el punto $\langle 0, 1\rangle$, mediante segmentos rectilíneos, con el punto $\langle 0, 0\rangle$ y con los puntos $\langle 1/n, 0\rangle$ para $n = 1, 2, \ldots$ Este conjunto no es localmente conexo en los puntos del eje y, con excepción del punto $\langle 0, 1\rangle$, donde sí lo es.

18.2. Propiedades de los espacios localmente conexos

Teorema 1. *En un espacio localmente conexo toda componente es un conjunto abierto.*

Demostración. Sea S una componente y $p \in S$. Sea E un entorno conexo del punto p, esto es, $p \in \mathrm{Int}(E)$ (tal entorno existe en virtud de la definición). Por tanto, $E \subset S$, de donde tenemos que $\mathrm{Int}(E) \subset \mathrm{Int}(S)$. De esto se sigue que $p \in \mathrm{Int}(S)$, es decir, que todo punto de la componente S es un punto interior. Luego la componente S es un conjunto abierto.

Teorema 2. *Todo subconjunto abierto de un espacio X localmente conexo es un conjunto localmente conexo.*

Demostración. Sea $p \in G$ y $0 < \varepsilon < \varrho(p, X - G)$. Como el espacio es localmente conexo en el punto p, existe un entorno conexo E del punto p tal que $\delta(E) < \varepsilon$, de donde $E \subset G$. Al mismo tiempo E es un entorno de p con respecto al conjunto G, es decir, $p \notin \overline{G - E}$ (ya que $p \notin \overline{X - E}$ por hipótesis). Esto significa que el conjunto G es localmente conexo en el punto p.

Teorema 3. *Las componentes de subconjuntos abiertos de un espacio localmente conexo son conjuntos abiertos.*

Esto es una consecuencia inmediata de los Teoremas 1 y 2.

Nota. El Teorema 3 caracteriza los espacios localmente conexos, o sea, que todo espacio en el que las componentes de conjuntos abiertos son conjuntos abiertos es localmente conexo.

Teorema 4. *Un subconjunto abierto de un espacio separable localmente conexo tiene un número numerable de componentes.*

En efecto, toda familia de conjuntos abiertos disjuntos en un espacio separable es numerable (véase Capítulo 13.3, Teorema 3).

Teorema 5. *Un espacio separable localmente conexo tiene una base consistente en conjuntos que son simultáneamente abiertos y conexos.*

Demostración. Sea $G_1, G_2, \ldots, G_n, \ldots$ una base del espacio (consistente en conjuntos abiertos pero no necesariamente conexos). Sea S_{n1} S_{n2} $\ldots$ una sucesión finita o infinita (cfr. Teorema 4) de componentes del con-

junto G_n. Los conjuntos S_{nk}, $n = 1, 2, \ldots$ y $k = 1, 2, \ldots$ forman una base de conjuntos abiertos y conexos (en virtud del Teorema 3).

Teorema 6. *Si S es una componente de un conjunto abierto G, entonces*

$$\mathrm{Fr}(S) \cap G = \emptyset.$$

Demostración. $\mathrm{Fr}(S) = \bar{S} - S$ por ser S un conjunto abierto. Pero $G - S$ es también un conjunto abierto, por ser la unión de conjuntos abiertos; tenemos, por tanto, $\bar{S} \cap (G - S) = S \cap (G - S) = \emptyset$, como queríamos demostrar.

18.3. Arcos. Conexión por arcos

Definición 1. Un *arco* es un conjunto que es homeomorfo al intervalo cerrado $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Podemos comprobar fácilmente que todo arco es un continuo localmente conexo.

Un arco con extremos x e y se designa normalmente por el símbolo xy (o yx).

Teorema 1. *Si $ab \cap bc = \{b\}$, entonces la unión $ab \cup bc$ es un arco ac.*

En efecto, podemos definir una transformación continua biunívoca del intervalo cerrado $[0, 1/2]$ en el arco ab y una transformación continua biunívoca del intervalo $[1/2, 1]$ en el arco bc de forma que ambas transformaciones transformen el punto $^1/_2$ en el punto b. De esta forma obtenemos un homeomorfismo del intervalo cerrado $[0, 1]$ en el conjunto $ab \cup bc$.

Teorema 2. *Si $ab \cap bc \neq \emptyset$, entonces la reunión $ab \cup bc$ contiene un arco que conecta a con c.*

En efecto, sea d el primer punto del arco ab (ordenado de a a b) que está en el arco bc. ad designa el arco contenido en ab, y dc el arco contenido en bc. Tenemos, por tanto, $ad \cap dc = \{d\}$. Por el Teorema 1 el conjunto $ad \cup dc$ es un arco ac.

Definición 2. Se dice que un espacio es *localmente conexo por arcos* si para todo punto p y para todo $\varepsilon > 0$, existe un $\eta > 0$ tal que si $|x - p| < \eta$, entonces el punto x puede conectarse con el punto p por medio de un arco de diámetro $< \varepsilon$.

Teorema 3. *Un espacio que es localmente conexo por arcos en el punto p, es localmente conexo en p.*

En efecto, si designamos por E el conjunto de puntos que pueden conectarse con p por medio de un arco de diámetro $< \varepsilon$ podemos demostrar fácilmente que E es un entorno conexo del punto p con diámetro $\leqslant 2\varepsilon$.

Teorema 4. *Dos puntos cualesquiera de un espacio conexo y localmente conexo por arcos pueden conectarse por un arco en el espacio.*

DEMOSTRACIÓN. Sea p un punto dado del espacio X. Designemos por F el conjunto de todos los puntos x que se pueden conectar con p por un arco. Tenemos que demostrar que $F = X$ o, lo que es equivalente (por ser el espacio conexo), que el conjunto F es abierto y cerrado.

Para demostrar que $F = \overline{F}$ supongamos que

$$x = \lim_{n \to \infty} x_n, \qquad \text{donde,} \qquad x_n \in F.$$

Como el espacio es localmente conexo por arcos en el punto x, el punto x_n puede conectarse con x, para un n suficientemente grande, por medio del arco $x_n x$. Pero como $x_n \in F$, existe ahí un arco px_n. Por el Teorema 2 la reunión $px_n \cup x_n x$ de los arcos px_n y $x_n x$ contiene un arco px. Por tanto $x \in F$.

Para demostrar que F es abierto, supongamos que $x \in F$. Como los puntos situados suficientemente cerca de x se pueden conectar con x por medio de un arco, también, por el Teorema 2, se pueden conectar por un arco con p (porque por hipótesis, x puede conectarse con p por medio de un arco). Por tanto $x \in \operatorname{Int}(F)$. De esto se sigue que el conjunto F es abierto.

Teorema 5. *Si un espacio compacto es localmente conexo por arcos, entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\eta > 0$ tal que si $|x - x'| < \eta$ los puntos x y x' pueden conectarse por medio de un arco xx' de diámetro $< \varepsilon$.*

Así, con uniformidad es válida la elección de una η correspondiente a ε (independiente de p). La demostración es completamente análoga a la demostración del Teorema 5 en el Capítulo 15.4.

18.4. Continuos localmente conexos

Teorema 1 (Sierpiński). *Una condición necesaria y suficiente para que el continuo C sea localmente conexo, es que para todo $\epsilon > 0$, C se pueda representar como la unión de un número finito de continuos cada uno de los cuales tiene diámetro $< \varepsilon$, es decir*

(1) $$C = C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_n,$$

y

(2) $$\delta(C_n) < \varepsilon.$$

DEMOSTRACIÓN. *La condición es necesaria.* Sea C un continuo localmente conexo, y sea $\varepsilon > 0$. Para cada punto $p \in C$ designemos por R_p un conjunto abierto conexo tal que $p \in R_p$ y $\delta(R_p) < \varepsilon$. Tal conjunto existe en virtud del Teorema 5, apartado 2. La familia de conjuntos R_p es un

recubrimiento del espacio C. Por tanto (cfr. Teorema de Borel-Lebesgue, Capítulo 15.3, Teorema 3) existe en ella un número finito de conjuntos abiertos conexos $R_{p1}, R_{p2}, \ldots, R_{p_n}$ que también recubre C. Sea

$$C_k = \overline{R_{pk}} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Las condiciones (1) y (2) se satisfacen, por tanto. Además, el conjunto C_k es conexo, por ser clausura de un conjunto conexo (véase Capítulo 16.2, Teorema 7), y compacto, por ser un subconjunto cerrado de un conjunto compacto (véase Teorema 5, Capítulo 15.2). Por tanto, C_k es un continuo.

Hemos, pues, demostrado que la condición es necesaria.

Ahora demostraremos que *es suficiente*.

Supongamos que los continuos $C_1, C_2, \ldots, C_n$ satisfacen las condiciones (1) y (2). Sea $p \in C$. Vamos a encontrar un entorno conexo E del punto p cuyo diámetro no sea mayor que 2ε.

Designemos por $C_{k1}, C_{k2}, \ldots, C_{k_r}$ continuos que contienen el punto p y todos los restantes por $C_{m1}, C_{m2}, \ldots, C_{m_s}$.

Sea

$$E = C_{k1} \cup C_{k2} \cup \ldots \cup C_{k_r}.$$

Tenemos, por tanto

$$C - E \subset C_{m1} \cup C_{m2} \cup \ldots \cup C_{m_s},$$

de donde

$$\overline{C - E} \subset C_{m1} \cup C_{m2} \cup \ldots \cup C_{m_s}.$$

Por tanto, $p \in C - \overline{C - E}$, esto es, $p \in \mathrm{Int}(E)$. El conjunto E es, pues, un entorno del punto p. Es un conjunto conexo por ser la reunión de dos conjuntos conexos que contienen el punto p.

Finalmente, $\delta(E) \leqslant 2\varepsilon$. En efecto, sean $x, y \in E$. Sean $x \in C_{ki}$, $y \in C_{kj}$. Como

$$|x - y| \leqslant |x - p| + |p - y|$$

y como por (2)

$$|x - p| \leqslant \delta(C_{ki}) < \varepsilon \quad \text{y} \quad |p - y| \leqslant \delta(C_{kj}) < \varepsilon,$$

tenemos $|x - y| < 2\varepsilon$. Se sigue que $\delta(E) \leqslant 2\varepsilon$.

Teorema 2. *Una imagen continua de un continuo localmente conexo es un continuo localmente conexo.*

Demostración. Sea K un continuo localmente conexo, f una función continua y $f(K) = C$.

En virtud del teorema de Heine sobre continuidad uniforme (Cap. 15.4, Teorema 5), para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\eta > 0$ tal que para una pareja arbitraria $x_1, x_2 \notin K$ la condición

(3) $$|x_1 - x_2| < \eta$$

implica

(4) $$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

En virtud del Teorema 1 existen continuos K_1 K_2, $K_n, \ldots$, tales que

(5) $$K = K_1 \cup K_2 \cup \ldots \cup K_n$$

y

(6) $$\delta(K_i) < \eta.$$

Por tanto se sigue de (5) [cfr. Cap. 4.4 (14)] que

(7) $$C = f(K) = f(K_1) \cup f(K_2) \cup \ldots \cup f(K_n).$$

Por (6) para todo par de puntos x_1 y x_2 pertenecientes a K_i se verifica la fórmula (4), y por tanto

(8) $$\delta[f(K_i)] \leqslant \varepsilon.$$

Por ser $f(K_i)$ un continuo (véase Cap. 4.4, Teorema 3), deducimos de las fórmulas (7) y (8) y del Teorema 1 que C es un continuo localmente conexo.

Nota 1. Una imagen continua de un espacio localmente conexo que no es compacto no tiene por que ser un espacio localmente conexo.

Consideramos el ejemplo del espacio S en el Capítulo 17.1 (1), y unamos el punto $\langle 1, 0 \rangle$ con el punto $\langle 0, 1 \rangle$ por medio de un arco de modo que el arco no corte el conjunto S en ningún punto. El conjunto así obtenido, como se ve fácilmente, es una imagen continua del semirrayo $0 \leqslant x < +\infty$ pero no es localmente conexo.

Nota 2. Del Teorema 2 se sigue en particular que una imagen continua de un segmento cerrado o de un rectángulo (junto con su frontera) es un continuo localmente conexo. Por tanto, las curvas que tienen representación paramétrica continua en un intervalo, de la forma:

$$x = x(t), \qquad y = y(t), \qquad z = z(t), \qquad \text{donde} \qquad a \leqslant t \leqslant b,$$

son continuos localmente conexos, así como las superficies de la forma

$$x = x(u, v), \qquad y = y(u, v), \qquad z = z(u, v),$$

donde $a \leqslant u \leqslant b$, $c \leqslant v \leqslant d$.

Así, las configuraciones geométricas que con mayor frecuencia se estudian en análisis son localmente conexas.

Nota 3. El teorema que afirma que una imagen continua de un intervalo cerrado es un continuo localmente conexo tiene recíproco, es decir, es válido el siguiente teorema (debido a Mazurkiewicz):

Todo continuo localmente conexo es una imagen continua del intervalo cerrado $0 \leq t \leq 1$.

No daremos una demostración detallada de este teorema, pero nos limitaremos a demostrarlo bajo la hipótesis de conexión local por arcos; esta limitación es, después de todo, aparente, pues es posible demostrar que todo continuo localmente conexo es también localmente conexo por arcos (Teorema de Mazurkiewicz-Moore).

Teorema 3. *Todo continuo localmente conexo por arcos* $C(\neq \emptyset)$ *es una imagen continua de un intervalo.*

Demostración. Basándonos en el Teorema 3, Capítulo 15.8, podemos afirmar que existe una función continua f definida en algún subconjunto cerrado H del conjunto de Cantor tal que $f(H) = C$. Designamos por α y β los puntos inicial y final del conjunto H. Extenderemos la función f a todo el segmento $\alpha\beta$. El conjunto $\alpha\beta - H$, por ser $\alpha\beta$ abierto, es la unión de la sucesión de intervalos abiertos $(a_1b_1), (a_2b_2) \ldots$

Evidentemente,

$$\lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0,$$

de donde

$$\lim_{n\to\infty} |f(b_n) - f(a_n)| = 0 \tag{9}$$

por la continuidad uniforme de la función f.

De acuerdo con el Teorema 5, apartado 4, existe una sucesión de números η_k tal que cada dos puntos p y q del continuo C que satisfagan la desigualdad $|p - q| < \eta_k$ pueden unirse mediante un arco con diámetro $< 1/k$. Por tanto en vírtud de (9) existe una sucesión de arcos L_n con extremos $f(a_n)$ y $f(b_n)$ que satisfacen la desigualdad

$$\lim_{n\to\infty} \delta(L_n) = 0. \tag{10}$$

Sea f_n un homeomorfismo que aplica el segmento (cerrado) a_nb_n en el arco L_n, de forma que $f_n(a_n) = f(a_n)$ y $f_n(b_n) = f(b_n)$. Por último sea

$$g(t) = \begin{cases} f(t) & \text{para} \quad t \in H, \\ f_n(t) & \text{para} \quad a_n < t < b_n, \quad n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Por tanto la función g aplica el segmento $\alpha\beta$ en el continuo C. Que es una función continua se sigue fácilmente de (10).

Nota 4. Del Teorema 3 se sigue en particular que *un cuadrado con su frontera es una imagen continua de un segmento;* lo mismo es cierto para el cubo n-dimensional $\mathcal{I}^n$, e incluso para el cubo de Hilbert $\mathcal{H}$.

Este descubrimiento, hecho por Peano (en 1890) se consideró como muy paradójico. Pues significa que el cuadrado $\mathcal{I}^2$ tiene una representación paramétrica continua sobre un intervalo cerrado, en contra de la idea intuitiva de que esta propiedad es característica de las curvas. De esto se sigue que la hipótesis de diferenciabilidad que se hace normalmente en Análisis para las representaciones paramétricas, es esencial desde este punto de vista.

Lo que sigue es una demostración directa del Teorema de Peano (dada por Sierpiński).

Dividimos el cuadrado en 9 cuadrados iguales y trazamos una diagonal de cada uno como se indica en la figura 11. Dividimos el segmento [0, 1] en 9 segmentos iguales y transformamos (linealmente) cada uno de ellos en la diagonal correspondiente en el orden dado en la figura 11. Designamos por f_1 la función así definida, que transforma el segmento [0, 1] continuamente en la poligonal consistente en 9 diagonales. Llamaremos a los cuadrados considerados cuadrados de primera aproximación.

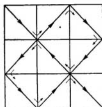


Fig. 11

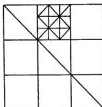


Fig. 12

A continuación, dividimos cada uno de los 9 cuadrados en 9 cuadrados iguales; son los cuadrados de segunda aproximación. Trazamos una diagonal D en cada uno de ellos; aquí, en los cuadrados de segunda aproximación que están sobre una diagonal de un cuadrado de primera aproximación consideramos esa diagonal sobre D. Así, el primero de los cuadrados de los de primera aproximación queda dividido como indica la figura 11 (después de la correspondiente reducción); el segundo cuadrado de los de primera aproximación se da en la figura 12.

Dividimos cada uno de los intervalos $(n-1)/9$, $n/9$, donde $n=1, 2, \ldots, 9$, en 9 partes iguales y transformamos cada una de estas partes en la diagonal del cuadrado correspondiente, de la segunda subdivisión. Esto define una función f que transforma el intervalo [0, 1] continuamente en el arco poligonal formado por 9^2 intervalos.

Reiterando, llegamos a una sucesión infinita de funciones continuas $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ Es fácil demostrar que esta sucesión es uniformemente convergente; y por tanto su función límite es continua (véase Capítulo 12.5, Teorema 1). Además, todo punto del cuadrado es un valor de la función; en efecto, en todo cuadrado de la aproximación n-ésima hay valores de la función f_n y por tanto

$$\overline{\bigcup_n f_n(\mathcal{I})} = \mathcal{I}^2, \quad \text{de donde} \quad f(\mathcal{I}) = \mathcal{I}^2.$$

Nota 5. Advertimos que la demostración del Teorema 3 en el caso en que el continuo C es el cubo n-dimensional se puede simplificar algo. Concretamente, en este caso podemos tomar el intervalo con extremos $f(a_n)$ y $f(b_n)$ como arco L_n; por tanto, podemos definir la función f_n como la transformación lineal del intervalo $a_n b_n$ en el intervalo $f(a_n)f(b_n)$.

Este Teorema se puede deducir también directamente del Teorema 3, Capítulo 15.8, y del Teorema de Tietze (Capítulo 12.8, Corolario 1).

EJERCICIOS

1. Sea E un subconjunto abierto del intervalo $a < x < b$. Demostrar que las componentes del conjunto E son intervalos abiertos. Además, si hay un número infinito de estas componentes, sus diámetros tienden a cero.

2. Demostrar que la conexión local en un punto dado es invariante topológica; es decir, que si el espacio X es localmente conexo en el punto p y f es un homeomorfismo, el espacio $f(X)$ es localmente conexo en el punto $f(p)$.

3. Demostrar que una condición necesaria y suficiente para que un espacio sea localmente conexo en el punto p, es que para todo número $\varepsilon > 0$ exista un número $\eta > 0$ tal que la condición $|x - p| < \eta$ implique la existencia de un conjunto conexo C que satisface las condiciones $x, p \in C$ y $\delta(C) < \varepsilon$.

4. Sea $p \in A \cap B$. Si los conjuntos A y B son localmente conexos en el punto p, entonces el conjunto $A \cap B$ es también localmente conexo en este punto.

5. Si los espacios X e Y son localmente conexos en los puntos a y b respectivamente, entonces el producto cartesiano $X \times Y$ es localmente conexo en el punto $\langle a, b \rangle$.

6. Sea E un subconjunto arbitrario de un espacio localmente conexo. Si C es un subconjunto conexo de E y es abierto en E (es decir, es de la forma $C = E \cap G$, donde G es un conjunto abierto), entonces existe un conjunto abierto conexo H tal que $C = E \cap H$.

Sugerencia: Utilizar el Teorema 3, apartado 2.

7. Si un espacio localmente conexo se puede representar como la reunión de dos conjuntos cerrados A y B con intersección localmente conexa, los conjuntos A y B son localmente conexos.

Sugerencia: Utilizar los Ejercicios anteriores 4 y 6 y el Ejercicio 4 del Capítulo 16.

8. Sea X un espacio localmente conexo. Si F es un conjunto cerrado localmente conexo y C una componente del conjunto $X - F$, entonces los conjuntos $X - C$ y $C \cup F$ son localmente conexos.
Sugerencia: Utilizar el Ejercicio 7.

9. Sea E un subconjunto arbitrario de un espacio localmente conexo y $E = S_1 \cup S_2 \cup \ldots$ la descomposición de E en componentes.
Entonces

$$\mathrm{Int}(E) = \overline{\bigcup_n \mathrm{Int}(S_n)}.$$

10. Sea E_t un subconjunto arbitrario de un espacio localmente conexo y sea S una componente de E. Demostrar que

$$\mathrm{Fr}(\bigcup_t E_t) \subset \overline{\bigcup_t \mathrm{Fr}(E_t)}.$$

Sugerencia: Utilizar el Teorema 3 del Capítulo 16.2.

11. Sea E un subconjunto arbitrario de un espacio localmente conexo y sea S una componente de E. Demostrar que $\mathrm{Fr}(S) \subset \mathrm{Fr}(E)$.

12. Sea E un subconjunto arbitrario de un espacio localmente conexo. Si el conjunto $\mathrm{Fr}(E)$ es localmente conexo, entonces $\overline{E}$ es localmente conexo.
Sugerencia: Utilizar el Ejercicio 7.

13. Sea X un continuo localmente conexo. Demostrar que cada uno de sus subcontinuos C es la intersección de una sucesión decreciente de continuos localmente conexos:

$$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n, \qquad C_1 \supset C_2 \supset \ldots$$

Sugerencia: Usar el Teorema 1, apartado 4.

CAPÍTULO **19**

El concepto de dimensión

19.1. Conjuntos 0-dimensionales

Se dice que un espacio X es *0-dimensional en el punto p* si existen conjuntos abierto-cerrados arbitrariamente pequeños que contienen al punto p. Escribimos entonces $\dim_p X = 0$.

Un espacio no vacío X que es 0-dimensional en cada punto se dice que es 0-dimensional; escribimos esto en forma de la igualdad: $\dim X = 0$.

Ejemplos de espacio 0-dimensionales son: el espacio de los números naturales, el espacio de los números racionales, el espacio de los números irracionales, el conjunto de Cantor y cualquier conjunto finito.

El conjunto constituido por los intervalos

$$(1/3, 1/2), (1/5, 1/4), \ldots, (1/(2n+1), 1/2n), \ldots$$

y el punto 0, es 0-dimensional en el punto 0 y sólo en ese punto.

Un intervalo, así como cualquier espacio conexo (que no se reduzca a un único punto), no es 0-dimensional; pues no contiene conjuntos abierto-cerrados distintos del espacio completo.

19.2. Propiedades de los conjuntos 0-dimensionales

Introducimos aquí sin demostración las propiedades más importantes de los conjuntos 0-dimensionales (véanse las referencias a las demostraciones en los Ejercicios). Pudimos ya observar algunas de estas propiedades en el conjunto de Cantor.

Teorema 1. *Todo espacio separable 0-dimensional tiene una base consistente en conjuntos abierto-cerrados.*

Teorema 2. *Todo espacio separable 0-dimensional está contenido topológicamente en el conjunto de Cantor (esto es, es homeomorfo a algún subconjunto del conjunto de Cantor).*

Teorema 3. *Todo espacio compacto 0-dimensional puede descomponerse en conjuntos disjuntos cerrados de diámetro $< \epsilon$ (ϵ positivo arbitrario):*

$$X = F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_m, \quad F_i \cap F_j = \emptyset \quad \text{para} \quad i \neq j, \quad \delta(F_i) < \varepsilon.$$

Teorema 4 (normalidad fuerte). *Para todo par de conjuntos disjuntos cerrados A y B, existe un conjunto abierto-cerrado G tal que $A \subset G$* y $G \cap B = \emptyset$.

Teorema 5. *La unión de una sucesión finita o infinita de conjuntos cerrados 0-dimensionales es un conjunto 0-dimensional.*

19.3. Espacios n-dimensionales

Definimos la dimensión inductivamente:

1. La dimensión del conjunto vacío es -1.
2. La dimensión del conjunto X en el punto p es $\leqslant n$, es decir

(1) $$\dim_p X \leqslant n,$$

si existen conjuntos abiertos arbitrariamente pequeños que contengan a p y tengan fronteras a lo sumo $(n-1)$-dimensionales;

3. Un conjunto X que tiene dimensión $\leqslant n$ en todos sus puntos es, a lo sumo, de dimensión n:

(2) $$\dim X \leqslant n.$$

Además, suponemos que $\dim_p X = \infty$ si no se verifica (1) para ningún n natural, y que $\dim X = \infty$ si no se verifica (2) para ningún n.

La definición de la dimensión 0, dada en el párrafo 2, está de acuerdo con la definición dada aquí, pues un conjunto abierto-cerrado es un conjunto con una frontera que es el vacío, y, por tanto, de dimensión (-1).

En el sentido de la definición anterior un intervalo cerrado tiene dimensión 1, pues cada uno de sus puntos puede rodearse por un intervalo arbitrariamente pequeño y, por tanto, por un conjunto cuya frontera consiste en dos puntos (o quizá en uno, si p es un extremo del intervalo); pero un conjunto finito es 0-dimensional. Se sigue que la dimensión del intervalo ha de ser $\leqslant 1$; al mismo tiempo — como sabemos — la dimensión de un intervalo es $\neq 0$, por tanto es $= 1$.

De un modo exactamente análogo demostramos que la dimensión de la circunferencia de un círculo es 1. Similarmente, la dimensión de una

recta no acotada, o de un arco (es decir, de un conjunto homeomorfo con un intervalo cerrado) y de una simple curva cerrada (es decir, un conjunto homeomorfo con una circunferencia de un círculo) es 1.

El plano tiene dimensión ≤ 2, ya que todo punto en el plano es el centro de un círculo arbitrariamente pequeño; y, como indicamos, la circunferencia de un círculo es de dimensión 1.

Similarmente la superficie de una esfera tridimensional tiene dimensión ≤ 2.

La demostración de que el plano no tiene dimensión 1 (y por tanto, de que su dimensión es exactamente 2) no es sencilla. Volveremos a esta demostración en el Capítulo 20.3.

Cuando decimos del espacio $\mathcal{E}^n$ que es « n-dimensional », nos referimos a la así llamada dimensión geométrica. Un teorema de fundamental importancia para la teoría topológica de la dimensión es el que afirma que $\dim \mathcal{E}^n = n$.

Hemos dado la demostración de este teorema para $n = 1$. Hemos demostrado que $\dim \mathcal{E}^2 \leq 2$; de forma exactamente análoga demostramos (por inducción) que

(3) $$\dim \mathcal{E}^n \leq n.$$

Ahora bien, la demostración de que $\dim \mathcal{E}^n > n-1$ presenta dificultades — como dijimos — ya para $n = 2$ (cfr. Teorema 3, Cap. 20.3).

Teorema. *La dimensión es un invariante topológico.*

En efecto, la condición 2, significa que en todo entorno del punto p existen conjuntos abiertos que contienen al punto p y tienen fronteras de dimensión a lo sumo n—1.

19.4. Propiedades de los espacios n-dimensionales

Enunciaremos, sin demostración, diversos teoremas de la teoría de la dimensión. Son generalizaciones de 0 a n de los teoremas en el apartado 2.

Teorema 1. *Todo espacio separable n-dimensional tiene una base consistente en conjuntos abiertos con fronteras de dimensión a lo sumo* $n-1$.

Teorema 2. *Todo espacio separable n-dimensional está contenido topológicamente en el cubo* $\mathcal{I}^{2n+1}$

En particular, todo conjunto 1-dimensional (y por tanto toda curva) está contenida topológicamente en el cubo $\mathcal{I}^3$ y todo conjunto 2-dimensional (en particular las superficies consideradas en Análisis) están contenidas en el cubo $\mathcal{I}^5$.

Estos exponentes no pueden hacerse menores, es decir, para todo n existe un conjunto n-dimensional que no está contenido topológicamente en el cubo $\mathcal{I}^{2n}$. Por ejemplo, una poligonal consistente en las aristas de un tetraedro y el segmento que une dos aristas disjuntas (véase fig. 13) no está contenida topológicamente en el plano (esto se sigue fácilmente del teorema de Jordan dado en el Capítulo 12.8).

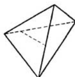


FIG. 13

La poligonal indicada en la figura 14 tiene la misma propiedad. Consiste en 6 aristas de un tetraedro y los 4 segmentos que unen el centro de gravedad del tetraedro con los vértices.

**Nota* 1. Toda poligonal que no puede incluirse topológicamente en el plano contiene topológicamente una de las poligonales indicada en las figuras 13 y 14.

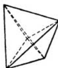


FIG. 14

**Nota* 2. Si $\dim X < n$, entonces el conjunto de homeomorfismos es denso en el espacio funcional $(\mathcal{I}^{2n+1})^X$.

Teorema 3. *Todo espacio compacto n-dimensional puede, para cualquier $\varepsilon > 0$, descomponerse en conjuntos cerrados de diámetro $< \varepsilon$ de modo que ningún punto pertenezca simultáneamente a $n+2$ de estos conjuntos:*

(4) $$X = F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_m, \quad \delta(F_i) < \varepsilon,$$

(5) $$F_{i_0} \cap F_{i_1} \cap \ldots \cap F_{i_{n+1}} = \emptyset \quad \text{si} \quad i_0 < i_1 < \ldots < i_{n+1}.$$

Por ejemplo, mediante un sistema finito de puntos, un segmento se puede descomponer en segmentos arbitrariamente pequeños tales que ningún punto pertenezca a tres de ellos.

Un rectángulo se puede descomponer en rectángulos pequeños por un sistema de «ladrillos», como se indica en la figura 15 y ningún punto, pertenece a 4 «ladrillos». Similarmente, el cubo $\mathcal{I}^n$ se puede descomponer en «ladrillos» que satisfacen las fórmulas (4) y (5).

Nota. La condición dada en el Teorema 3 es necesaria y suficiente para que un espacio compacto tenga dimensión $\leqslant n$.

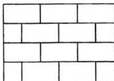


Fig. 15

Teorema 4 (normalidad fuerte). *Para todo par de conjuntos disjuntos cerrados A y B, existe un conjunto abierto G tal que*

$$A \subset G, \qquad \bar{G} \cap B = \emptyset, \qquad \dim \mathrm{Fr}(G) \leqslant n-1.$$

Teorema 5. *La unión de una sucesión (finita o infinita) de conjuntos cerrados n-dimensionales es un conjunto n-dimensional.*

Teorema 6. *Para todo espacio compacto n-dimensional X, existe un subconjunto cerrado T del conjunto de Cantor y una función continua f que aplica el conjunto T en X que no toma ningún valor más de $n+1$ veces.*

Por ejemplo, un intervalo cerrado puede obtenerse del conjunto de Cantor con ayuda de una función continua que no tome ningún valor más de dos veces (tal función es la función escalonada definida en el Capítulo 15.8, figura 8).

Nota. La existencia de un conjunto T y de una función f con la propiedad enunciada en el Teorema 6 forma una condición que no sólo es necesaria, sino también suficiente para que $\dim X \leqslant n$.

EJERCICIOS

1. Demostrar que todo conjunto de números reales que no contiene intervalos es 0-dimensional.

2. Demostrar que el conjunto de puntos en el plano, con una coordenada racional y la otra irracional, es 0-dimensional.

3. Demostrar que el conjunto de puntos del espacio euclídeo $\mathcal{E}^n$ cuyas coordenadas son (todas) irracionales es 0-dimensional.

4. Sugerencia para la demostración del Teorema 1, apartado 2. Considerar para un n dado, todos los conjuntos abierto-cerrados con diámetro $< 1/n$ y aplicar el Teorema de Lindelöf (Cap. 13.1, Teorema 3).

5. Sugerencia para la demostración del Teorema 2, apartado 2. Considerar la función característica de una base consistente en conjuntos abierto-cerrados.

CAPÍTULO **20**

Símplices y sus propiedades

20.1. Símplices *

Definición. Sea $p_0 \dots p_n$ un sistema dado de $n+1$ puntos en un n-espacio euclídeo. Entendemos por *simplex* $p_0, \dots, p_n$ el conjunto de todos los puntos p de la forma

(1) $$p = \lambda_0 p_0 + \dots + \lambda_n p_n$$

donde

(2) $$\lambda_0 + \dots + \lambda_n = 1,$$

(3) $$\lambda_i > 0,$$

y donde la multiplicación de un punto por un escalar y la adición de puntos se han de entender como en el álgebra de puntos (o vectores), esto es

$$\lambda \cdot (x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n),$$

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n).$$

En este Capítulo supondremos siempre que los puntos $p_0, \dots, p_n$ son linealmente independientes, es decir, que no están en un mismo hiperplano $(n-1)$-dimensional. Esto significa, en el caso $n = 2$, que los puntos p_0, p_1, p_2 no están alineados, o que $p_0p_1p_2$ es un triángulo (sin contorno); de un modo similar, cuando $n = 3$, $p_0p_1p_2p_3$ es el interior de un tetraedro no degenerado (es decir, los puntos p_0, p_1, p_2 y p_3 no son coplanarios).

Los coeficientes $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ son las coordenadas baricéntricas del punto p; se pueden interpretar como masas que han de ser distribuidas en los puntos $p_0, \dots, p_n$ respectivamente (conservando las condiciones (2) y (3)) de

(*) La palabra inglesa *simplex* se deja en español sin traducir. Su plural es símplices. — *N. del T.*

forma que el punto p sea el centro de gravedad. Naturalmente, cada una de las coordenadas baricéntricas es una función continua del punto p.

De cada uno de los puntos $p_0, \ldots, p_n$ se dice que es un *vértice* del simplex $p_0 \ldots p_n$; de cada uno de los símplices $p_{i_0} \ldots p_{i_k}$, donde

$$i_0 < \ldots < i_k \leqslant n,$$

se dice que es una *cara* (o arista) del simplex.

Incluimos los vértices, así como el simplex completo S, en las caras del simplex $S = p_0 \ldots p_n$ (pues k toma los valores de 0 a n).

Señalemos que

$$\bar{S} = \bigcup p_{i_0} \ldots p_{i_k}, \tag{4}$$

para todos los posibles sistemas de números $i_0, \ldots, i_k$, en los que k toma todos los valores enteros de 0 a n.

Por último señalemos que

1. *los símplices* $p_{i_0} \ldots p_{i_k}$ *en* (4) *son disjuntos.*

2. *el punto* p *pertenece a* $\bar{S}$ *cuando y sólo cuando satisface las condiciones* (1) *y* (2) *y*

$$\lambda_i > 0. \tag{5}$$

20.2. Subdivisión simplicial

Sea

$$S = p_0 \ldots p_n.$$

Se entiende por *subdivisión simplicial* de $\bar{S}$ toda subdivisión de $\bar{S}$ en símplices tales que la intersección de las clausuras de cada par de símplices es la clausura de su cara común (que puede ser el conjunto nulo). La figura 16 muestra una subdivisión simplicial de un triángulo.

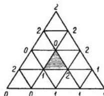


Fig. 16

Si en la figura 16 suprimiésemos los lados del triángulo sombreado, ya no representaría una subdivisión simplicial.

Se puede demostrar que:

1. *Para todo* $\varepsilon > 0$ *existe una subdivisión simplicial de* $\bar{S}$ *en símplices con diámetro* $< \varepsilon$.

2. **Teorema de Sperner.** *Supongamos que* $\bar{S}$ *está subdividido simplicialmente y que la función* $m(s)$ *asigna a cada vértice de los símplices de esta subdivisión el entero* $m(s)$ *que satisface la condición siguiente:*

(6) *si* $s \in p_{i_0} \ldots p_{i_k}$, $m(s)$ *es uno de los enteros* $i_0, \ldots, i_k$.

En estas condiciones existe, entre los símplices de la subdivisión considerada, al menos uno en cuyos vértices la función $m(s)$ *toma todos los valores de* 0 *a* n.

(El simplex sombreado en la figura 16 es un ejemplo de simplex tal).

Efectuaremos la demostración por inducción. Demostraremos una aserción más fuerte: que el número r de símplices en cuyos vértices la función $m(s)$ toma los valores de 0 a n es impar.

Para $n = 0$ es evidente; pues entonces $S = \{p_0\}$ y $r = 1$.

Supongamos que el teorema (en la formulación más fuerte) es válido para $n - 1$. Demostraremos que es válido para n.

Consideremos la familia de todos los símplices de dimensión $(n - 1)$ que aparecen en la subdivisión simplicial (para la subdivisión representada en la figura, sería la familia de todos los lados de los triángulos). Entre ellos distinguimos aquellos símplices en cuyos vértices la función $m(s)$ toma todos los valores de 0 a $n - 1$. Designamos por **R** la familia de estos símplices. Finalmente, en la familia **R**, consideramos aquellos símplices que están en la cara $p_0 \ldots p_{n-1}$ (en la figura, ésta es el segmento $[0, 1]$ situado en la base del triángulo). Designamos por u el número de estos símplices. Por hipótesis u es impar.

Escribamos la sucesión

$$A_1, A_2, \ldots, A_t, A_{t+1}, \ldots, A_w$$

de todos los símplices que aparecen en la subdivisión simplicial considerada; supongamos que los símplices $A_1, \ldots, A_t$ tienen dimensión n y que los restantes la tienen $< n$.

Designamos por v_j para $j \leqslant t$ el número de caras del simplex A_j perteneciente a **R**. Designando por W_j el conjunto de valores que toma la función $m(s)$ en los vértices del simplex A_j, demostramos fácilmente que:

1. Si $W_j = (0, 1, \ldots, n)$, entonces $v_j = 1$.
2. Si $(0, 1, \ldots, n - 1) \subset W_j \neq (0, 1, \ldots, n)$, entonces $v_j = 2$.
3. Si $(0, 1, \ldots, n - 1) \not\subset W_j$, entonces $v_j = 0$.

Por tanto

$$r \equiv (v_1 + v_2 + \ldots + v_t) \bmod 2.$$

Por otra parte, si asignamos a cada $j < t$ las caras del simplex A_j perteneciente a **R** (supuesto que existen tales caras), entonces todo simplex perteneciente a **R** se asignará a uno o dos índices j según que esté o no en la cara $p_0 \ldots p_{n-1}$. Por tanto tenemos

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_t \equiv u \bmod 2, \qquad \text{de donde} \qquad r \equiv u \bmod 2,$$

y, por tanto, r es un número impar (pues u es impar).

20.3. Dimensión de un simplex

LEMA. *Sea un sistema finito de conjuntos cerrados $F_0, \ldots, F_n$ dados en un espacio compacto, tales que*

(7) $$F_0 \cap \ldots \cap F_n = \emptyset;$$

entonces existe un $\varepsilon > 0$ tal que todo conjunto X, que tenga puntos comunes con cada uno de los conjuntos $F_0, \ldots, F_n$, tiene un diámetro $> \varepsilon$.

DEMOSTRACIÓN. Designemos por $f(x_0, \ldots, x_n)$, donde $x_0 \in F_0 \ldots, x_n \in F_n$ el máximo de los números $|x_i - x_j|$, donde los índices i y j toman los valores de 0 a n. Es fácil comprobar que la función f es continua. Designamos por ε la cota inferior máxima de esta función. Como el conjunto $F_0 \times \ldots \times F_n$ es compacto, la función f alcanza en él su cota inferior máxima (véase Capítulo 15.4, Teorema 4). Por tanto, sea $f(a_0, \ldots, a_n) = \varepsilon$. De esto se sigue que $\varepsilon > 0$, pues en caso contrario tendríamos que $a_0 = \ldots = a_n$ en contra de la igualdad (7).

Al mismo tiempo, si $x_0 \in X \cap F_0, \ldots, x_n \in X \cap F_n$, entonces

$$f(x_0, \ldots, x_n) > \varepsilon \qquad \text{de donde} \qquad \delta(X) > \varepsilon.$$

Teorema 1. *Si el sistema de conjuntos cerrados $F_0, \ldots F_n$ satisface la condición*

(8) $$p_{i_0} \ldots p_{i_k} \subset F_{i_0} \cup \ldots \cup F_{i_k}$$

para cada cara del simplex $S = p_0 \ldots p_n$, entonces

(9) $$F_0 \cap \ldots \cap F_n \neq \emptyset.$$

DEMOSTRACION. Supongamos lo contrario, esto es, que en (7) valga el signo de igualdad, y apliquemos el lema.

Supongamos que tenemos una división simplicial de $\overline{S}$ en símplices de diámetro $< \varepsilon$. Sea s un vértice de algún simplex de esta subdivisión. En virtud de la fórmula (4) y por el hecho de que las caras del simplex S son

disjuntas (véase apartado 1, 1) existe sólo una cara $p_{i_0} \dots p_{i_k}$ que contiene a s; y por tanto, por (8), existe un índice i_j tal que $s \in F_{i_j}$.

Hagamos

(10) $$m(s) = i_j, \quad \text{esto es,} \quad s \in F_{m(s)}.$$

La función $m(s)$ así definida satisface la condición (6). Por tanto existe, en virtud del Teorema de Sperner, un simplex $s_0 \dots s_n$ tal que para $i = 0, \dots, n$,

(11) $m(s_i) = i$, y por tanto, $s_i \in F_i$, esto es, $\overline{s_0 \dots s_n} \cap F_i = \emptyset$,

en contra del lema, pues $\delta(s_0 \dots s_n) < \varepsilon$.

Teorema 2. *Sea P_i la unión de todas las caras del simplex S que tiene por vértices p_i (dicho de otra forma, P_i es el conjunto de todos los puntos de $\overline{S}$ para los que $\lambda_i > 0$). Supongamos que el sistema de conjuntos cerrados $F_0 \dots F_n$ satisface las condiciones*

(12) $$\overline{S} = F_0 \cup \dots \cup F_n,$$

(13) $$F_i \subset P_i.$$

Entonces se satisface la condición (8) *y por tanto (en virtud del Teorema* 1) *también la condición* (9).

Demostración. Sea $p \in p_{i_0} \dots p_{i_k}$. Por tanto, para todo j distinto de cada uno de los números $i_0, \dots, i_k$, tenemos $\lambda_j = 0$, esto es $p \notin P_j$, de donde $p \notin F_j$ en virtud de (13). Aplicando (12) de esto deducimos que

(14) $$p \in F_0 \cup \dots \cup F_{j-1} \cup F_{j+1} \cup \dots \cup F_n.$$

Como la fórmula (14) se verifica para cada j que satisfaga las desigualdades

$$j \neq i_0 \ \dots \ j \neq i_k$$

se sigue que $p \in F_{i_0} \cup \dots \cup F_{i_k}$.

Luego queda demostrada la inclusión (8).

Teorema 3. $\dim \overline{S} = n$.

Esquema de la demostración. En virtud de la fórmula (3), Capítulo 19.3, tenemos que $\dim \mathcal{E}^n \leqslant n$. Por tanto

(15) $$\dim \overline{S} \leqslant n.$$

Así, hemos demostrado que

(16) $$\dim \overline{S} > n - 1.$$

Sea

(17) $$T_i = \overline{S} - P_i$$

(donde P_i tiene el mismo significado que en el Teorema 2); así, T_i es el conjunto de todos los puntos p para los que $\lambda_i = 0$ (dicho de otra forma

es la clausura de las caras opuestas al vértice p_i). En virtud de la condición (2) tenemos

(18) $$T_0 \cap \ldots \cap T_n = \emptyset$$

y como los conjuntos T_i son cerrados podemos aplicarles el lema.

Supongamos que, en contra de la desigualdad (16), $\dim \bar{S} < n-1$. En virtud del Teorema 3 del Capítulo 19.4 (enunciado sin demostración), podemos descomponer $\bar{S}$ en un número finito de conjuntos cerrados

(19) $$S = H_1 \cup H_2 \cup \ldots \cup H_m$$

tal que:

1. Nıngún punto pertenece simultáneamente a $n+1$ de los conjuntos H_j.

2. $\delta(H_j) < \varepsilon$, donde ε es el número que aparece en el lema; esto significa que cada uno de los conjuntos H_j es disjunto con al menos uno de los conjuntos T_i, o — en virtud de (17) — está contenido en al menos uno de los conjuntos P_i.

Dividamos los conjuntos H_j en clases, poniendo en la clase cero aquellos que están contenidos en p_0; en la clase primera aquéllos que no pertenecen a la clase cero y están contenidos en P_1; y así sucesivamente de forma que, finalmente, pertenecen a la clase n-ésima aquéllos que no pertenecen a ninguna de las clases precedentes y están contenidos en P_n.

Como

(20) $$\bar{S} = P_0 \cup \ldots \cup P_n$$

cada uno de los conjuntos H_j ha correspondido a una, y sólo una, clase.

Designemos por F_i la suma de los conjuntos pertenecientes a la clase i-ésima. Entonces se satisfacen las condiciones (13) y (12) [en virtud de (19) y (20)]. En virtud del Teorema 2 la desigualdad (9) también se verifica. Sea $p \in F_0 \cap \ldots \cap F_n$; esto significa que el punto p pertenece para cada $i = 0, \ldots, n$, a alguno de los conjuntos de la clase i-ésima. Pero entonces este punto pertenece a $n+1$ de los conjuntos H_j en contra de la condición 1.

Esta contradicción demuestra que la desigualdad (16) se satisface.

Así hemos obtenido la *fórmula fundamental* de la teoría de la dimensión: $\dim \bar{S} = n$, y por tanto $\dim \mathcal{E}^n = n$.

20.4. Teorema del punto fijo

Sea S, como antes, el simplex $p_0 \cdots p_n$.

Teorema de Brouwer. *Para cada aplicación continua f del conjunto $\bar{S}$ uno de sus subconjuntos existe algún punto fijo, esto es, un punto p tal que*

(21) $$f(p) = p.$$

DEMOSTRACIÓN. Emplearemos la notación siguiente: para un punto arbitrario $p \in \bar{S}$ escribiremos

(22) $$f(p) = p^* = \lambda_0^* p_0 + \ldots + \lambda_n^* p_n$$

donde (análogamente a (2) y (5)):

(23) $$\lambda_0^* + \ldots + \lambda_n^* = 1,$$

(24) $$\lambda_i^* \geqslant 0.$$

Tenemos que demostrar que existe un punto p tal que

(25) $$\lambda_i^* = \lambda_i \quad \text{para todo } i.$$

Designemos por F_i el conjunto de todos los puntos p para los que

(26) $$\lambda_i^* \leqslant \lambda_i.$$

En virtud de la continuidad de las coordenadas baricéntricas y de la función f, los conjuntos F_i son cerrados. Demostraremos que se satisface la condición (8).

Sea $p \in p_{i0} \ldots p_{ik}$. Esto significa que

(27) $$\lambda_{i0} + \ldots + \lambda_{ik} = 1.$$

Pero como por (23):

(28) $$\lambda_{i0}^* + \ldots + \lambda_{ik}^* \leqslant 1,$$

por tanto, de (27) y (28) se sigue que

$$\lambda_{i0}^* + \ldots + \lambda_{ik}^* \leqslant \lambda_{i0} + \ldots + \lambda_{ik},$$

y por tanto (cfr. (24), para algún $j \leqslant k$ tenemos $\lambda_{ij}^* \leqslant \lambda_{ij}$. Por (26) esto significa que $p \in F_{ij}$. Por tanto, está demostrada la inclusión (8).

Debido al Teorema 1, apartado 3, se satisface la desigualdad (9). Por tanto sea $p \in F_0 \ldots F_n$. Esto significa que

(29) $$\begin{array}{l} \lambda_0^* \leqslant \lambda_0, \\ \ldots\ldots\ldots \\ \lambda_n^* \leqslant \lambda_n. \end{array}$$

Sumando estas desigualdades obtenemos

$$\lambda_0^* + \ldots + \lambda_n^* \leqslant \lambda_0 + \ldots + \lambda_n,$$

que por (23) y (2), conduce a,

$$\lambda_0^* + \ldots + \lambda_n^* = \lambda_0 + \ldots + \lambda_n.$$

Por tanto, en el sistema de desigualdades (29) no puede aparecer una desigualdad estricta de la forma $\lambda_i^* < \lambda_i$. Dicho de otra forma, se verifica la fórmula (25).

Notas. 1. Para $n = 1$ el Teorema de Brouwer afirma que en toda aplicación continua de un intervalo cerrado en uno de sus subconjuntos, existe un punto fijo. Esto es una consecuencia inmediata de la propiedad de Darboux para la función $f(x) - x$.

2. El teorema de Brouwer es también evidentemente aplicable al cubo n-dimensional así como a cualquier conjunto homeomorfo a $\bar{S}$. Es interesante destacar que este teorema se puede generalizar también al cubo de Hilbert $\mathcal{H}$ y a algunos espacios funcionales.

Esta generalización tiene frecuentes aplicaciones en la Teoría de ecuaciones diferenciales para demostrar los teoremas de existencia (*). Pues, un teorema de existencia para una ecuación diferencial, puede formularse como teorema de existencia de un punto fijo en una adecuada aplicación del espacio de las funciones continuas en sí mismo (bajo hipótesis convenientes que no daremos aquí).

Ilustraremos esto con un ejemplo (cfr. Capítulo 15, Ejercicio 7).

Resolver la ecuación diferencial

$$dy/dx = f(x, y) \tag{30}$$

con valores iniciales x_0, y_0, significa encontrar una función g de la variable x tal que

$$dg(x)/dx = f(x, g(x)) \qquad \text{y} \qquad g(x_0) = y_0.$$

Dicho de otro modo, debemos encontrar una función g tal que

$$g(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, g(t))dt. \tag{31}$$

Designemos por h la aplicación que asigna a cada función φ la función h_φ de la variable x definida por la condición

$$h_\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))dt.$$

El punto fijo de esta aplicación es una función g tal que

$$h_g = g, \qquad \text{esto es} \qquad h_g(x) = g(x) \quad \text{para todo} \quad x,$$

lo que significa que la función g satisface la desigualdad (31).

De esta forma, la demostración de la existencia de una solución de la ecuación diferencial se reduce a la demostración de la existencia de un punto fijo para la aplicación h (que aplica cierto espacio funcional en uno de sus subespacios).

(*) J. Schauder, *Der Fixpunktsatz in Funktionalräumen*. Studia Mathematica 2 (1930).

COROLARIO. *La superficie C del conjunto $K = E_z|z| \leqslant 1$ (en un espacio euclídeo de un número arbitrario de dimensiones) no es un retracto de ese conjunto; es decir, no existe una función continua f que aplique K en C de forma que*

(32) $$f(x) = x \quad para \quad x \in C.$$

DEMOSTRACIÓN. Si existiese una función f con las propiedades citadas, entonces la función

(33) $$g(x) = -f(x)$$

aplicaría K en $g(K) \subset K$ sin un punto fijo, en contra del Teorema de Brouwer (véase Nota 2).

En efecto, si $x \in K - C$ entonces $g(x) \neq x$, ya que $g(x) \in C$. Pero si $x \in C$ entonces $g(x) = -x$ en virtud de (33) y (32) y por tanto también tenemos que $g(x) \neq x$.

Esto completa la demostración del corolario.

Daremos ahora otra formulación de este corolario, utilizando el concepto de *homotopía*.

DEFINICIÓN. Sean dos aplicaciones continuas, f, g, del espacio X en el espacio Y, esto es, $f, g \in Y^X$. Decimos que estas dos funciones son *homotópicas* si existe una función continua h de dos variables x y t, donde $0 \leqslant t \leqslant 1$ tales que

(34) $$h(x, t) \in Y, \qquad h(x, 0) = f(x) \qquad y \qquad h(x, 1) = g(x).$$

Esto lo podemos decir de un modo más gráfico; existe una transición continua desde la aplicación f hasta la aplicación g (interpretamos el parámetro t como el tiempo).

Señalemos que si el espacio Y es el espacio $\mathcal{E}$ de números reales (o, con mayor generalidad $Y = \mathcal{E}^n$), las funciones f y g son siempre homotópicas. Basta poner

$$h(x, t) = f(x) + t[g(x) - f(x)].$$

No obstante, si Y designa la circunferencia de un círculo o, más generalmente, la esfera $\mathcal{S}_n$ (esto es, el conjunto de puntos $x_1^2 + \ldots + x_{n+1}^2 = 1$ del espacio $\mathcal{E}^{n+1}$), entonces lo antedicho no es cierto. Concretamente, *la identidad y una constante no son homotópicas.* Esto significa que si

$$X = Y = \mathcal{S}_n, \qquad f(x) = x, \qquad g(x) = c, \qquad c \in \mathcal{S}_n$$

no existe una función continua h que satisfaga la condición (34).

En efecto, supongamos que existe tal función h y que

$$f^*(tx) = h(x, 1 - t) \qquad para \qquad x \in \mathcal{S}_n \qquad y \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Supongamos que $\mathcal{K}_{n+1}$ consiste en los puntos $|z| < 1$; por tanto $\mathcal{S}_n$ es su superficie.

Como todo punto de $\mathcal{K}_{n+1}$ se puede representar unívocamente en la forma $z = tx$ (con la excepción del punto $z = 0$), por tanto la función f^* es continua, esto es, $f^* \in (\mathcal{S}_n)^{\mathcal{K}_{n+1}}$, y al mismo tiempo tenemos

$$f^*(x) = h(x, 0) = f(x) = x,$$

esto es, la función f^* es una retracción de $\mathcal{K}_{n+1}$ a su superficie. Pero esto es imposible por el último corolario.

EJERCICIOS

1. Sea S un simplex n-dimensional situado en un espacio $\mathcal{E}^n$. Demostrar que la frontera del simplex S es la unión de todas sus caras de dimensión $< n$.

2. El continuo C consiste en la clausura de la gráfica de la función $y = \operatorname{sen}(1/x)$ para $0 < |x| < (1/\pi)$ y de un arco que une los puntos $(-1/\pi, 0)$, $(1/\pi, 0)$ fuera del resto del continuo C. Demostrar que para toda aplicación continua del conjunto C en un subconjunto suyo existe un punto fijo.

3. Sea $S = p_0 \ldots p_n$ un simplex dado y X un espacio dado cubierto con conjuntos abiertos: $X = G_0 \cup \ldots \cup G_n$.

Considerar la aplicación

$$\varkappa(x) = \lambda_0(x) \cdot p_0 + \ldots + \lambda_n(x) \cdot p_n,$$

donde

$$\lambda_i(x) = \varrho(x, X - G_i) / \{\varrho(x, X - G_0) + \ldots + \varrho(x, X - G_n)\}$$

(esto es la llamada *aplicación kappa*).

Demostrar que

(a) $\varkappa(x) \in \overline{S}$ donde $\lambda_i(x)$ es la coordenada baricéntrica i-ésima del punto $\varkappa(x)$ [esto es, satisfacen las condiciones (2) y (5)];

(b) $\varkappa^{-1}(P_i) = G_i$ donde P_i tiene el mismo significado que en el Teorema 2, apartado 3;

(c) $\varkappa^{-1}(p_{i_0} \ldots p_{i_k}) = G_{i_0} \cap \ldots \cap G_{i_k} - \bigcup_i G_i$ donde la unión es sobre todos los índices i diferentes de $i_0, \ldots, i_k$;

(d) $\varkappa(X - G_i) \cap P_i = \emptyset$;

(e) si toda intersección de $m + 2$ de los conjuntos $G_0, \ldots, G_n$ es vacía, $\dim \varkappa(X) \leqslant m$.

4. Sea $S = p_0 \ldots p_n$ un simplex dado y sea f una aplicación continua de S en sí mismo. Suponemos que, si $p \in \operatorname{Fr}(S)$, entonces $f(p) \in \operatorname{Fr}(S)$ y que $f(p) \neq p$. Demostrar que $f(\overline{S}) = \overline{S}$.

Sugerencia: Suponiendo que $f(\overline{S}) \neq \overline{S}$ designamos por r el punto perteneciente a $S - f(S)$ y por $g(p)$ la proyección del punto $f(p)$ de r en $\operatorname{Fr}(S)$. Así llegamos a una contradicción con el Teorema de Brouwer.

5. Sean $S = p_0 \ldots p_n$ y los conjuntos $G_0, \ldots, G_n$, abiertos en $\overline{S}$, satisfacen las condiciones $\overline{S} = G_0 \cup \ldots \cup G_n$ y $G_i \subset P_i$ para $i = 0, \ldots, n$. Entonces $G_0 \cap \ldots \cap G_n \neq \emptyset$.

Sugerencia: Utilizar el Teorema 2, apartado 3, y el Ejercicio 18, Capítulo 12.

6. Sea T_i la clausura de la cara opuesta al vértice p_i (cfr. (17)). Demostrar que si los conjuntos cerrados F_0, F_n satifacen las condiciones $S = F_0 \cup \ldots \cup F_n$ y $T_i \subset F_i$, entonces $F_0 \cap \ldots \cap F_n \neq \emptyset$.
Sugerencia: Utilizar el Ejercicio 5.

7. Sea $S = p_0 \ldots p_n$ y f una transformación continua de $\overline{S}$ en sí mismo tal que $f(T_i) \subset T_i$ para $i = 0, \ldots, n$. Entonces $f(\overline{S}) = \overline{S}$.
Sugerencia: Razónese como en la solución del Ejercicio 4 y hágase $F_i = g^{-1}(T_i)$. Después aplíquese el Ejercicio 5.

CAPÍTULO **21**

Complejos, cadenas y homologías

21.1. Grupos abelianos

Daremos primero los conceptos y teoremas de la teoría de grupos que vamos a utilizar en este capítulo.

Definición 1. Se dice que un conjunto abstracto G es un *grupo abeliano* o *conmutativo*, si en este conjunto está definida una operación, llamada *adición*, tal que a todo par de elementos a y b en G esté asignado un cierto elemento $a + b$ del conjunto G (llamado *suma* de los elementos a y b) de forma que se satisfacen las siguientes condiciones, llamadas *axiomas de la teoría de grupos conmutativos:*

(i) $(a + b) + c = a + (b + c)$.

(ii) $a + b = b + a$.

(iii) Existe exactamente un elemento (designado por 0) del conjunto G que posee la propiedad de que $a + 0 = a$ para todo $a \in G$.

(iv) Para todo elemento $a \in G$ existe exactamente un *elemento opuesto* (que designamos por $(-a)$) con la propiedad de que $a + (-a) = 0$.

EJEMPLOS. 1. El conjunto de los enteros es un grupo respecto a la adición, pero, por el contrario, no es grupo si definimos la multiplicación como la operación del grupo, pues en este caso no se satisface el axioma (iv).

2. El conjunto de los números complejos z tales que $|z| = 1$ (son números de la forma e^{ix}) es un grupo abeliano respecto a la operación de la multiplicación de números complejos.

3. El conjunto de todas las funciones continuas f, definidas en el espacio X y que toman valores complejos no nulos, forma un grupo abeliano si definimos la operación del grupo como sigue:

$$(f_3 = f_1 \cdot f_2) \equiv \bigwedge_x [f_3(x) = f_1(x) \cdot f_2(x)].$$

Definición 2. Si un subconjunto G_0 del grupo G forma un grupo con respecto a la operación del grupo definida en G, esto es, si la condición $a, b \in G_0$, implica que $(a + b) \in G_0$ y $(-a) \in G_0$, llamamos a G_0 *subgrupo* del grupo G. Definimos la relación $a \sim b \ (\mathrm{mod} G_0)$ para elementos del grupo G como sigue:

(v) $[a \sim b(\mathrm{mod} G_0)] \equiv [(a - b) \in G_0]$.

Teorema. *La relación* (v) *es una relación de equivalencia, esto es, es reflexiva, simétrica y transitiva.*

Demostración. $a \sim a(\mathrm{mod} G_0)$, esto es, $a - a = 0 \in G_0$ (pues G_0 es un subgrupo de G).

$[a \sim b(\mathrm{mod} G_0)] \equiv [(a - b) \in G_0] \equiv [b - a \in G_0] \equiv [b \sim a(\mathrm{mod} G_0)]$.

Sea $(a \sim b)$ y $(b \sim c)$, esto es, $(a - b) \in G_0$ y $(b - c) \in G_0$; de esto obtenemos $(a - b) + (b - c) \in G_0$, y por tanto, $a \sim c(\mathrm{mod} G_0)$.

La relación (v) conduce a la descomposición de los elementos del grupo G en conjuntos disjuntos de elementos mutuamente conjugados, llamados *cogrupos* (aunque *no* son grupos) o *clases de restos* (cfr. Ejercicio 9, Capítulo 5).

Designamos por $G_0(a)$ el conjunto de los elementos de G que son conjugados de a, $\mathrm{mod} G_0$. Así,

$$[G_0(a) = G_0(b)] \equiv [a \sim b(\mathrm{mod} G_0)].$$

Introducimos la operación de la adición de cogrupos del modo siguiente:

(vi) $G_0(a) + G_0(b) \underset{\mathrm{def}}{=} G_0(a + b)$.

Podemos demostrar fácilmente que la adición definida por la fórmula (vi) no depende de la elección del elemento escogido en cada cogrupo y que con esta operación el conjunto de cogrupos forma un grupo abeliano.

Definición 3. El grupo constituido por los cogrupos con la operación (vi) se llama *grupo cociente* y se representa por G/G_0.

Definición 4. Sean G y H dos grupos abelianos. Se dice que es una función f que aplica el grupo G sobre un subconjunto del grupo H es un *homorfismo* del grupo G en el grupo H si

$$f(a + b) = f(a) + f(b).$$

Llamamos al homorfismo f un *isomorfismo* si la función f es uno-uno; si además $f(G) = H$, entonces los grupos G y H se dicen *isomorfos*.

Así como la Topología estudia los invariantes en los homeomorfismos, la teoría de grupos atiende a los invariantes en los isomorfismos. Desde el punto de vista de la teoría de grupos, dos grupos isomorfos tienen las mismas propiedades y pueden identificarse.

Nota. La conexión entre los conceptos de homorfismo y grupo cociente se establece por el siguiente teorema (que no se utilizará en este libro):

Supongamos que f es un homorfismo del grupo G sobre el grupo H. Designemos por G_0 el conjunto de aquellos elementos del grupo G que se aplican por f en el elemento cero del grupo H (este conjunto se llama el núcleo del homorfismo f), esto es,

$$(x \in G_0) \equiv [f(x) = 0].$$

Entonces:

1. *El conjunto G_0 es un subgrupo del grupo G.*
2. *El grupo cociente G/G_0 es isomorfo al grupo H.*

21.2. Símplices orientados. Cadenas

Sea $S = p_0 \ldots p_n$ un simplex n-dimensional ($n \geqslant 0$) (véase Capítulo 20.1). Toda sucesión constituida con sus $n + 1$ vértices (sin repetición) se llama *un simplex orientado;* identificamos dos símplices orientados cualesquiera si uno de ellos se puede obtener del otro por una permutación par; decimos entonces que estos símplices tienen la misma orientación (por supuesto, un simplex 0-dimensional tiene exactamente una orientación); por ejemplo

$$(p_0, p_1, p_2) = (p_1, p_2, p_0) = (p_2, p_0, p_1), \qquad (p_0, p_1, p_2) \neq (p_1, p_0, p_2).$$

Esto se ilustra por la figura 17.

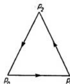


Fig. 17

Por *complejo* (cerrado) entendemos un conjunto finito de símplices que tienen la propiedad de que si algún simplex pertenece a él, pertenecen a él también todas las caras de ese simplex.

Sea **K** un complejo. Los símplices n-dimensionales pertenecientes a **K**, después de haber sido orientados, se consideran como elementos generadores

de un grupo abeliano, designado por $\mathbf{L}^n(\mathbf{K})$; por tanto los elementos de este grupo, llamados *cadenas n-dimensionales*, son formas lineales:

(1) $$L = k_1S_1 + k_2S_2 + \ldots + k_mS_m$$

donde $S_1, S_2, \ldots, S_m$ son símplices orientados n-dimensionales, y $k_1, \ldots, k_m$ son números enteros.

Aquí suponemos que la multiplicación de un simplex S de dimensión > 1 por -1 representa un cambio de su orientación, e identificamos la cadena $1 \cdot S$ con S, por ejemplo:

$$-1(p_0, p_1) = (p_1, p_0) = 1(p_1, p_0),$$

$$-1(p_0, p_1, p_2) = (p_1, p_0, p_2), \qquad -1(p) = (p).$$

Como es costumbre, designamos por 0 el cero del grupo $\mathbf{L}^n(\mathbf{K})$ y consideramos que 0 es una cadena n-dimensional para todo $n = 0, 1, 2, \ldots$

Nota. Evidentemente, una cadena n-dimensional está definida cuando están dados los coeficientes $k_1, k_2, \ldots$ para todos los símplices n-dimensionales del complejo $\mathbf{K}$ (algunas de las k_i pueden anularse), por tanto es posible definir una cadena n-dimensional como una función f que asigna a cada simplex n-dimensional S, un entero $k = f(S)$; esta función es impar (en el sentido de que un cambio en la orientación del simplex S, se traduce en un cambio de signo de la función); la suma de funciones $h = f + g$, se define por la regla

$$h(S) = f(S) + g(S).$$

Para tal definición del grupo $\mathbf{L}^n(\mathbf{K})$, el 0 de este grupo es la función que es idénticamente cero.

21.3. Borde de una cadena. Ciclos

Para definir el *borde* ∂L de la cadena L, definiremos primero el borde de un simplex orientado

(2) $$\begin{cases} \text{Si } L = (p_0, \ldots, p_n), \text{ entonces} \\ \partial L = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (p_0, \ldots, p_{k-1}, p_{k+1}, \ldots, p_n), \\ \partial(p_0) = 1. \end{cases}$$

Después, suponiendo que L sea de la forma (1), pondremos

(3) $$\partial L = \sum_{j=1}^{m} k_j \cdot \partial S_j.$$

Por ejemplo,

$$\partial(p_0, p_1) = (p_1) - (p_0), \qquad \partial[5(p_0)] = 5,$$

$$\partial(p_0, p_1, p_2) = (p_1, p_2) + (p_2, p_0) + (p_0, p_1),$$

$$\partial[(p_0, p_1, p_2) + (p_2, p_1, p_3)] = (p_0, p_1) + (p_1, p_3) + (p_3, p_2) + (p_2, p_0)$$

(ver fig. 18).

De las definiciones anteriores se sigue inmediatamente que el borde de una cadena n-dimensional para $n \geqslant 1$, es una cadena $(n-1)$-dimensional, y que la operación ∂L es aditiva.

(4) $$\partial(L_1 + L_2) = \partial L_1 + \partial L_2.$$

Por tanto, para $n \geqslant 1$, *la operación ∂L es un homomorfismo que aplica el grupo* $\mathbf{L}^n(\mathbf{K})$ *sobre un subgrupo del grupo* $\mathbf{L}^{n-1}(\mathbf{K})$.

Entendemos por ciclo una cadena L tal que $\partial L = 0$.

Es fácil demostrar que

(5) $$\partial\partial L = 0.$$

Esto es, que *el borde de una cadena arbitraria (de dimensión $n \geqslant 1$) es un ciclo;* la demostración se hace primero para el caso en que L se reduce a un simplex (fórmula (2)) y luego se aplica la fórmula (4).

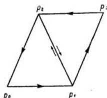


Fig. 18

(6) *La suma de dos ciclos es un ciclo.*

Pues si $\partial L_1 = 0 = \partial L_2$, entonces $\partial(L_1 + L_2) = \partial L_1 + \partial L_2 = 0$.

Se sigue que los ciclos n-dimensionales forman un subgrupo de cadenas n-dimensionales. Le designaremos por el símbolo $\mathbf{Z}^n(\mathbf{K})$.

21.4. Grupos de homología (o de Betti)

Decimos que el ciclo $Z \in \mathbf{Z}^n(\mathbf{K})$ es *homólogo a cero* en el complejo $\mathbf{K}$, lo que escribimos como

(7) $$Z \approx 0 \quad \text{en} \quad \mathbf{K},$$

si Z es el borde de alguna cadena $L \in \mathbf{L}^{n+1}(\mathbf{K})$:

(8) $$Z = \partial(L).$$

EJEMPLOS. Sea **K** un complejo consistente en los símplices (0-, 1- y 2- dimensionales) dados en la figura 19, excepto los símplices 012 y 345 (por simplificar escribimos k en lugar de p_k). Las cadenas

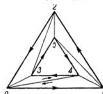


FIG. 19

$$Z_1 = (0, 1) + (1, 2) + (2, 0)$$

y

$$Z_2 = (3, 4) + (4, 5) + (5, 3)$$

son ciclos que no son homólogos a cero en **K**. Por otra parte tenemos

$$Z_1 - Z_2 \approx 0 \quad \text{en} \quad \mathbf{K}$$

porque $Z_1 - Z_2 = \partial L$, donde

$$L = (0, 4, 3) + (0, 1, 4) + (1, 5, 4) + (1, 2, 5) + (2, 3, 5) + (0, 3, 2).$$

La suma de dos ciclos homólogos a cero en **K** *es un ciclo homólogo a cero en* **K**, esto es

(9) $(Z_1 \approx 0 \text{ en } \mathbf{K})$ y $(Z_2 \approx 0 \text{ en } \mathbf{K}) \Rightarrow (Z_1 + Z_2 \approx 0 \text{ en } \mathbf{K})$.

Ya que si $Z_1 = \partial(L_1)$ y $Z_2 = \partial(L_2)$ entonces

$$Z_1 + Z_2 = \partial(L_1) + \partial(L_2) = \partial(L_1 + L_2).$$

De esto se sigue que *los ciclos n-dimensionales que son homólogos a cero en* **K** *forman un grupo*, que es un subgrupo del grupo $\mathbf{Z}^n(\mathbf{K})$. Lo designaremos por el símbolo $\mathbf{H}^n(\mathbf{K})$.

Si $Z_1 - Z_2 \approx 0$ en **K**, escribimos $Z_1 \approx Z_2$ en K y decimos entonces que los ciclos Z_1 y Z_2 son homólogos entre sí.

El grupo cociente $\mathbf{Z}^n(\mathbf{K})/\mathbf{H}^n(\mathbf{K})$ se llama el *n-ésimo grupo de homología* o *grupo de Betti* del complejo **K**. Le designaremos por $\mathbf{B}^n(\mathbf{K})$.

Así, un grupo de Betti está formado por la unión en clases de los ciclos homólogos entre sí.

Decimos que los ciclos $C_1, C_2, \ldots, C_m$ son *homológicamente independientes* (o *linealmente independientes módulo* $\mathbf{H}^n(\mathbf{K})$) si la condición

$$k_1C_1 + \ldots + k_mC_m \approx 0 \quad \text{en} \quad \mathbf{K}$$

implica que

$$k_1 = \ldots = k_m = 0.$$

El máximo número de ciclos n-dimensionales homológicamente independientes se llama el n-ésimo *número de Betti* del complejo **K**.

Por ejemplo, en el complejo dado en la figura 19 el primer número de Betti es 1 por existir ciclos 1-dimensionales no homólogos a cero, pero no existir dos de tales ciclos que sean homológicamente independientes.

Para un simplex arbitrario, el complejo consistente en todas sus caras tiene todos los números de Betti iguales a cero.

Designemos por $S(\mathbf{K})$ la unión de todos los símplices pertenecientes al complejo **K**. Por lo tanto es algún poliedro (un polígono, si **K** es un complejo uni o bi-dimensional). Es claro que este mismo poliedro P se puede representar en la forma $P = S(\mathbf{K})$ para diferentes **K**; por ejemplo, un poliedro bidimensional se puede triangular de varios modos. Se puede demostrar que los números de Betti no dependen del método de la subdivisión simplicial: si $S(\mathbf{K}) = S(\mathbf{K}_1)$, entonces los números n-ésimos de Betti para **K** y $\mathbf{K}_1$ son iguales; por tanto son una propiedad de los poliedros. Estos números *son invariantes en los homeomorfismos.*

En particular, el número 0-ésimo de Betti es el número de componentes menos 1 del poliedro considerado. El primer número de Betti de un polígono en el plano es el número de regiones en el complemento menos 1. Más generalmente: el n-ésimo número de Betti de un poliedro en el espacio $\mathcal{E}^{n+1}$ es el número de componentes de su complemento menos 1.

EJERCICIOS

1. El complejo **K** consiste en todos los segmentos $S_1 = p_0p_1, S_2 = p_1p_2 \ldots, S_m = p_{m-1}p_m$ junto con los vértices $p_0, p_1, \ldots, p_m$ del arco poligonal L (véase fig. 20). Sea un ciclo la cadena $Z = k_1S_1 + k_2S_2 + \ldots + k_mS_m$. Demostrar que $k_1 = k_2 = \ldots = k_m = 0$.

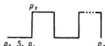


Fig. 20



Fig. 21

2. **K** está constituido por los segmentos y vértices de la poligonal L dada en la figura 21.

Asignamos una orientación al segmento de L en la dirección indicada en la figura. Designamos los símplices 1-dimensionales así obtenidos por $S_1, S_2, \ldots, S_8$. Demostrar:

(a) Que toda cadena de la forma

(i) $$k \cdot \sum_{i=1}^{8} S_i$$

es un ciclo.

(b) Que todo ciclo n-dimensional del complejo **K** es de la forma (i).

(c) Que (a) y (b) implican que el primer grupo de Betti del complejo **K** es isomorfo al grupo de los enteros.

3. **K** está constituido por los segmentos y vértices de dos poligonales L_1, L_2 que tienen un vértice común (véase fig. 22). Los segmentos del complejo **K** están orientados (como en la fig. 22); designémoslos por S_{1i} y S_{2i} según que el segmento pertenezca a L_1 o a L_2. Hagamos

$$Z_1 = \sum_{i=1}^{4} S_{1i}, \qquad Z_2 = \sum_{i=1}^{4} S_{2i}.$$



FIG. 22

Demostrar que:

(a) Todo ciclo unidimensional Z del complejo **K** es de la forma

(ii) $$Z = k_1 Z_1 + k_2 Z_2.$$

(b) Toda cadena de la forma (ii) es un ciclo.

Deducir de (a) y (b) la naturaleza del grupo de Betti del complejo **K**.

4. La figura 23, después de identificar los lados t_7^1 y t_8^1, representa una triangulación de una superficie llamada *cinta de Möbius*. La orientación t_i^2 de los triángulos de esta triangulación y también la orientación de los segmentos t_j^1 están señaladas en la figura.

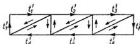


FIG. 23

Sea

$$L = \sum_{i=1}^{6} t^2 \quad \text{y} \quad Z = \sum_{i=1}^{6} t_i^1,$$

y demostrar que $\partial L = Z + 2t_7^1$.

5. Podemos obtener una triangulación del *plano proyectivo* del modo siguiente: consideramos la triangulación del cuadrado dado en la figura 24, consistente en los 24 triángulos orientados $t_1^2, t_2^2, \dots, t_{24}^2$ los 12 segmentos $t_1^1, t_2^1, \dots, t_{12}^1$ y los vértices; a continuación identificamos t_1^1 con t_7^1, t_2^1 con t_8^1, t_3^1 con t_9^1, t_4^1 con t_{10}^1, t_5^1 con t_{11}^1, y t_6^1 con t_{12}^1.

En lugar de los 12 segmentos orientados obtenemos 6 segmentos, que designamos como antes por $t_1^1, t_2^1, \dots, t_6^1$. Hemos obtenido así una triangulación **K** del plano proyectivo. Sea

$$L = \sum_{i=1}^{24}{}' t_i^2, \qquad Z = \sum_{j=1}^{6}{}' t_j^1$$

y demostrar que $\partial L = 2Z$ y que Z no es el borde de ninguna cadena bidimensional del complejo **K**.

Sugerencia: $\partial L_1 = Z$ implica $L_1 = kL$.

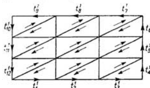


FIG. 24

6. Sea **K** un complejo formado por todas las caras de un tetraedro S y sea **L** el complejo formado por todas las caras de dimensión < 3 del tetraedro S. Mostrar que todos los números de Betti del complejo **K**, del cero-ésimo al tercero, se anulan. Los números cero-ésimo y primero del complejo **L** se anulan, pero el segundo se hace igual a 1.

7. Designar por m el número de los símplices r-dimensionales del complejo **K**. El número

$$\chi(\mathbf{K}) = \sum_{r=0}^{n}{}' (-1)^r m_r$$

se llama la *característica de Euler del complejo* **K**. Se verifica la siguiente fórmula (de Euler-Poincaré):

$$\chi(\mathbf{K}) = \sum_{r=0}^{n}{}' (-1)^r \cdot b_r(\mathbf{K}) + 1,$$

donde $b_r(\mathbf{K})$ representa el número de Betti r-ésimo del complejo **K**. Calcular $\chi(\mathbf{K})$ y los números de Betti para los complejos considerados en los ejercicios precedentes.

8. La función f asigna a cada vértice del complejo $\mathbf{K}$ algún vértice $f(p)$ del complejo $\mathbf{K}_2$ (no suponemos que a vértices distintos del complejo $\mathbf{K}_1$ le corresponden vértices distintos del complejo $\mathbf{K}_2$). Si la condición

$$(p_0 p_1 \dots p_n) \in \mathbf{K}_1$$

implica

$$[f(p_0)f(p_1)\ldots f(p_n)] \in \mathbf{K}_2,$$

entonces, decimos que f es una *aplicación simplicial* del complejo $\mathbf{K}_1$ en el complejo $\mathbf{K}_2$. Para cada simplex $S = p_0p_1\ldots p_n \in \mathbf{K}_1$ escribimos

$$f(S) = f(p_0)f(p_1)\ldots f(p_n)$$

en el caso en que los vértices $f(p_0), f(p_1), \ldots, f(p_n)$ sean distintos y $f(S) = 0$ en caso contrario.

La aplicación f induce la aplicación siguiente $\bar{f}$ del grupo $\mathbf{L}^n(\mathbf{K}_1)$ en el grupo $\mathbf{L}^n(\mathbf{K}_2)$: para

$$L = k_1S_1 + k_2S_2 + \ldots + k_mS_m$$

ponemos

$$\bar{f}(L) = k_1f(S_1) + k_2f(S_2) + \ldots + k_mf(S_m).$$

Demostrar las siguientes propiedades de la función $\bar{f}$:

(a) $\bar{f}(L_1 + L_2) = \bar{f}(L_1) + \bar{f}(L_2)$

[esto es, $\bar{f}$ es un homomorfismo del grupo $\mathbf{L}^n(\mathbf{K}_1)$ en el grupo $\mathbf{L}^n(\mathbf{K}_2)$].

(b) $\partial\bar{f}(L) = \bar{f}(\partial L)$.

(c) Si $Z \in \mathbf{Z}^n(\mathbf{K}_1)$, entonces $\bar{f}(Z) \in \mathbf{Z}^n(\mathbf{K}_2)$;
si $Z \approx 0$ en $\mathbf{K}_1$, entonces $\bar{f}(Z) \approx 0$ en $\mathbf{K}_2$;
si $Z_1 \approx Z_2$ en $\mathbf{K}_1$, entonces $\bar{f}(Z_1) \approx \bar{f}(Z_2)$ en $\mathbf{K}_2$.

Deducir de (a) y (b) y (c) que la aplicación $\bar{f}$ induce un homomorfismo del grupo $\mathbf{B}^n(\mathbf{K}_1)$ en el grupo $\mathbf{B}^n(\mathbf{K}_2)$.

CAPÍTULO 22

Cortes del plano

22.1. Propiedades auxiliares de los arcos poligonales

Como es habitual, designaremos el plano de los números complejos por $\mathcal{E}^2$. Por $\mathcal{S}_2$ designamos el plano $\mathcal{E}^2$ ampliado con el punto del infinito (llamado *plano de Gauss*); topológicamente $\mathcal{S}_2$ no difiere de la superficie de la esfera tri-dimensional.

Teorema 1. *Dos puntos cualesquiera de un conjunto abierto conexo R (esto es, de una región) situado en $\mathcal{S}_2$ se pueden unir por un arco poligonal.*

La demostración es completamente análoga a la demostración del Teorema 4 del Capítulo 18.4: designamos por F el conjunto de todos los puntos de la región R que se pueden unir por un arco poligonal con un punto fijo $p \in R$ y después demostramos que este conjunto es no-vacío y abierto y que el conjunto $R - F$ es abierto; tomando en consideración la conexión del conjunto R deducimos de esto que $F = R$.

Teorema 2. *Si L es un arco poligonal $\subset \mathcal{S}_2$, entonces el conjunto $\mathcal{S}_2 - L$ es homeomorfo al plano $\mathcal{E}^2$.*

La demostración es por inducción sobre el número n de eslabones en el arco poligonal.

Para $n = 1$ hemos de demostrar que el plano de Gauss menos un segmento es homeomorfo al plano de Gauss menos un punto.

Con este fin, describimos una sucesión de círculos concéntricos $K_1, K_2, \ldots$, con centro en el segmento L y con radios tendiendo a 0. Sea $E_1, E_2, \ldots$ una sucesión de elipses (junto con sus interiores) cuya intersección es el segmento L; podemos suponer que $E_1 = K_1$ (fig. 25).

Definimos el homeomorfismo requerido h como sigue: en el exterior del círculo K_1 ponemos $h(z) = z$. A continuación aplicamos el anillo

$\overline{E_1 - E_2}$ homeomorfamente en el anillo $\overline{K_1 - K_2}$; en general, aplicamos el anillo $\overline{E_m - E_{m+1}}$ en el $\overline{K_m - K_{m+1}}$.

El teorema está, pues, demostrado para $n = 1$.

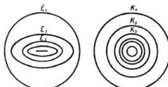


FIG. 25

Para $n = 2$ el arco poligonal L consiste en dos segmentos A_1 y A_2. Efectuamos una aplicación homeomorfa de $\mathcal{S}_2$ en $\mathcal{S}_2$, que deje invariante el segmento A_1, pero que aplique A_2 en la extensión rectilínea del segmento A_1. Por tanto, la demostración se reduce al caso $n = 1$.

Un método similar permite, en el caso en que L consiste en $n + 1$ segmentos, «estirar» el último segmento para obtener un arco poligonal de n lados.

Notas. Los Teoremas 1 y 2 son válidos en el espacio $\mathcal{E}^n$ para n arbitrario. Para $n = 2$ el Teorema 2 se puede afinar reemplazando la poligonal por un arco arbitrario; concretamente, el complemento de un arco contenido en $\mathcal{E}^2$ es homeomorfo al complemento de un punto. Por otra parte, para $n = 3$ el Teorema así afinado no es válido: existe en $\mathcal{E}^3$ un arco, el llamado *arco de Antoine,* cuyo complemento no es homeomorfo al complemento de un punto.

22.2. Cortes

Decimos que el conjunto A (abierto o cerrado) es un *corte* del espacio $\mathcal{S}_2$ (o bien: que *separa* o *corta* este espacio) si el conjunto $\mathcal{S}_2 - A$ no es conexo.

Los puntos p y q de $\mathcal{S}_2$ se dicen separados por A si estos puntos pertenecen a componentes distintos de $\mathcal{S}_2 - A$; se dice también que A corta (o separa) a S_2 entre p y q.

Teorema 1. *Si el conjunto cerrado A corta a $\mathcal{S}_2$ entre p y q, existen dos conjuntos cerrados R y Q tales que*

$$\mathcal{S}_2 = R \cup Q, \quad p \in R, \quad q \in Q \quad \text{y} \quad R \cap Q = A.$$

Demostración. Sea M un componente del conjunto $\mathcal{S}_2 - A$ que contiene al punto p, y sea N la reunión de todos los componentes restantes de este conjunto. Como los componentes de $\mathcal{S}_2 - A$ son abiertos (véase Capítulo 18.2, Teorema 3) y los conjuntos M, N y A son separados, los conjuntos $R = M \cup A$ y $Q = N \cup A$ son cerrados y, como se puede ver fácilmente, satisfacen las condiciones requeridas.

22.3. Funciones complejas que no se anulan nunca. Existencia del logaritmo

Designaremos por la letra $\mathcal{P}$ el plano menos el punto 0, esto es,

$$\mathcal{P} = \mathcal{E}^2 - \{0\}.$$

Decimos que la función $f \in \mathcal{P}^A$ (esto es, continua, definida sobre A, con valores complejos y siempre diferente de 0) tiene una *rama logarítmica continua uniforme* si es de la forma

$$(1) \qquad f(z) = e^{u(z)}, \qquad \text{donde} \qquad u \in (\mathcal{E}^2)^A$$

(la función u es esta rama). Entonces escribimos

$$f \sim 1.$$

Más generalmente: si $f \in \mathcal{P}^A$ y $B \subset A$, escribimos

$$f \sim 1 \qquad \text{sobre} \qquad B,$$

cuando existe una función $u \in (\mathcal{E}^2)^B$ tal que

$$(2) \qquad f(z) = e^{u(z)} \qquad \text{para} \qquad z \in B.$$

El siguiente teorema, cuya demostración va a ser nuestra meta inmediata, resulta fundamental para la topología del plano:

Teorema de Eilenberg. *Sea A un subconjunto compacto o abierto del espacio $\mathcal{P}$. Una condición necesaria y suficiente para que el conjunto A no separe a $\mathcal{S}_2$ entre los puntos 0 e ∞ es que la identidad tenga, sobre el conjunto A, una rama logarítmica uniforme continua, esto es, que exista una función $u \in (\mathcal{E}^2)^A$ tal que*

$$z = e^{u(z)} \qquad \textit{para} \qquad z \in A.$$

22.4. Teoremas auxiliares

Teorema 1. *Sea R un rayo (semirrecta) situado en el plano y con origen en el punto 0. Entonces $z \sim 1$ en el conjunto $\mathcal{E}^2 - R$.*

Demostración. Sea φ el ángulo formado por R y la dirección positiva del eje x, suponemos que $0 < \varphi < 2\pi$.

Como todo punto z del plano es de la forma $z = |z|e^{i\alpha}$, podemos suponer que $\varphi - 2\pi < \alpha < \varphi$ para puntos z no pertenecientes a R. La función

(3) $$u(z) = \log z = \log|z| + i\alpha$$

es continua en $\mathcal{C}^2 - R$ y satisface la identidad

$$z = e^{u(z)} \quad \text{para} \quad z \in \mathcal{C}^2 - R.$$

De esto obtenemos el siguiente teorema.

Teorema 2. *Si* $f \in (\mathcal{C}^2 - R)^A$ *es* $f \sim 1$.

En efecto, la función $u(f(z))$ es continua en el conjunto A y

$$f(z) = e^{u(f(z))} \quad \text{para} \quad z \in A$$

[donde u es la función definida por la fórmula (3)].

Teorema 3. *Sea* $f \in \mathcal{P}^A$. *A cada punto* $z \in A$ *le corresponde un cierto entorno* G *tal que*

(4) $$f \sim 1 \quad \text{en} \quad G.$$

Demostración. Sea R un rayo que parte del punto 0 y que no contiene al punto $f(z)$ (tal rayo existe por ser $f(z) \neq 0$). Debido a la continuidad de f tenemos

$$R \cap f(G) = \emptyset, \quad \text{esto es} \quad f(G) \subset \mathcal{C}^2 - R$$

para algún entorno G del punto z.

Esto significa que la función f considerada en G satisface la hipótesis del Teorema 2. Por tanto, resulta la fórmula (4).

Teorema 4. *Sean* $f \in \mathcal{P}^A$, $a \in A$ *y* c *uno de los valores de* $\log f(a)$. *Si* $f \sim 1$, *podemos elegir la función* u *de forma que satisfaga a la fórmula* (1) *y que verifique la condición « inicial »:*

(5) $$u(a) = c.$$

Demostración. Como $f \sim 1$, la función f es de la forma

$$f(z) = e^{v(z)} \quad \text{donde} \quad v \in (\mathcal{C}^2)^A.$$

Hagamos

(6) $$u(z) = v(z) - v(a) + c,$$

por tanto, tendremos

$$e^{u(z)} = e^{v(z)} \cdot e^{-v(a)} \cdot e^c = f(z),$$

ya que

$$e^{-v(a)} = 1/f(a) \quad \text{y} \quad e^c = e^{\log f(a)} = f(a).$$

Por tanto, la función u satisface la condición (1). Además, la fórmula (6) implica inmediatamente (5).

Nota. La condición inicial (5), en general no determina unívocamente la función u. No obstante, sí tendremos la univocidad con la hipótesis de que el conjunto A sea conexo. Esto es consecuencia del siguiente teorema.

Teorema 5. *Si el conjunto A es conexo y*

$$f(z) = e^{u(z)} = e^{v(z)} \tag{7}$$

entonces $v(z) = u(z) +$ constante.

DEMOSTRACIÓN. En virtud de (7), $e^{v(z)-u(z)} = 1$, y, por tanto, para todo z existe un entero $k(z)$ tal que $v(z) - u(z) = 2k(z)\pi i$. Por tanto, la función $k(z)$ es continua. Como $k(z)$ está definida en un espacio conexo y sus valores son enteros, debe ser constante (ya que la imagen continua de un conjunto conexo es conexa (cfr. Capítulo 16.2, Teorema 1).

Teorema 6. *Si F es un subconjunto cerrado de* $\mathcal{S}_2$ *y la función* $f \in \mathcal{P}^F$ *satisface la condición* $f \sim 1$, *entonces existe una función* $g \in \mathcal{P}^{S_2}$ *que es una extensión de la función f y que satisface la condición* $g \sim 1$.

DEMOSTRACIÓN. Por hipótesis, la fórmula (1) se satisface, y por el Teorema de Tietze (Capítulo 12.8, Corolario 1) la función u se puede extender a todo el espacio $\mathcal{S}_2$. Sea v esta extensión. Por tanto, tenemos

$$v \in (\mathcal{E}^2)^{S_2} \quad \text{y} \quad v(z) = u(z) \quad \text{para} \quad z \in F.$$

La función $g(z) = e^{v(z)}$ es la función deseada.

Teorema 7. *Sean A y B dos conjuntos abiertos o dos conjuntos cerrados con intersección conexa. Sea* $f \in \mathcal{P}^{A \cup B}$. *Si* $f \sim 1$ *sobre A y sobre B, entonces* $f \sim 1$ *sobre* $A \cup B$.

DEMOSTRACIÓN. Por hipótesis existen dos funciones $u \in (\mathcal{E}^2)^A$ y $v \in (\mathcal{E}^2)^B$ tales que

$$f(z) = \begin{cases} e^{u(z)} & \text{para} \quad z \in A, \\ e^{v(z)} & \text{para} \quad z \in B. \end{cases}$$

Sea $A \cap B \neq \emptyset$ y $a \in A \cap B$. Podemos suponer que v ha sido elegida de modo que $v(a) = u(a)$ (cfr. Teorema 4). Como el conjunto $A \cap B$ es conexo, se sigue (en virtud del Teorema 5) que $v(z) = u(z)$ para todo $z \in A \cap B$. Por tanto, si suponemos que

$$w(z) = \begin{cases} u(z) & \text{para} \quad z \in A, \\ v(z) & \text{para} \quad z \in B, \end{cases} \tag{8}$$

resulta — como se puede verificar fácilmente (véase Ejercicio 4, Capítulo 12) — que la función w es continua, esto es $w \in (\mathcal{E}^2)^{A \cup B}$. Como $f(z) = e^{w(z)}$ para $z \in A \cup B$ [cfr. (8)] es, por tanto, $f \sim 1$.

Llegamos a la misma conclusión si $A \cap B = \emptyset$.

Teorema 8. *Sea $f \in \mathcal{P}^G$ y sea $C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots$ una sucesión de conjuntos conexos tales que*

(9) $$G = C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_n \cup \ldots$$

y

(10) $$C_n \subset \operatorname{Int}(C_{n+1}) \quad \textit{para} \quad n = 1, 2, \ldots$$

Si $f \sim 1$ sobre C_n para todo n, entonces $f \sim 1$ (sobre G).

Demostración. Sea $a \in C_1$. Por hipótesis tenemos

(11) $$f(z) = e^{u_n(z)} \quad \text{para} \quad z \in C_n \quad \text{y} \quad u_n \in (\mathcal{E}^2)^{C_n}.$$

Podemos suponer (véase Teorema 4) que $u_n(a) = u_1(a)$. Se sigue, en virtud de la conexión del conjunto C_1 que $u_n(z) = u_1(z)$ para $z \in C_1$, y como $u_{n+1}(a) = u_n(a)$ tenemos análogamente,

(12) $$u_{n+1}(z) = u_n(z) \quad \text{para} \quad z \in C_n$$

Sea

(13) $$u(z) = u_n(z) \quad \text{para} \quad z \in C_n.$$

Por (12) y (9), la fórmula (13) define la función u unívocamente para todo $z \in G$. Esta es una función continua. Ahora, si $z_0 \in C_n$, en virtud de (10), $z_0 \in \operatorname{Int}(C_{(n+1)})$; pero como $u(z) = u_{(n+1)}(z)$ para todo $z \in C_n$, la continuidad de la función u_{n+1} en el punto z_0 implica la continuidad de la función u en este punto (cfr. Capítulo 12, Ejercicio 5).

Finalmente, las fórmulas (11) y (12) conducen a

$$f(z) = e^{u(z)} \quad \text{para} \quad z \in G, \quad \text{esto es} \quad f \sim 1.$$

Teorema 9. *Sea G un conjunto abierto (en $\mathcal{S}_2$) y sea $f \in \mathcal{P}^G$. Si*

(14) $$f \sim 1 \quad \textit{sobre} \quad C$$

para todo subcontinuo C del conjunto G, entonces $f \sim 1$ (sobre G).

Demostración. Supongamos en primer lugar que el conjunto G es conexo. Evidentemente existirá una sucesión de discos circulares abiertos $K_1, K_2, \ldots, K_n, \ldots$ tales que

(15) $$\overline{K}_n \subset G \quad \text{para} \quad n = 1, 2, \ldots$$

y

(16) $$G = K_1 \cup K_2 \cup \ldots \cup K_n \cup \ldots$$

Definiremos inductivamente una sucesión de continuos

$$C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots,$$

que satisfacen las condiciones (9) y (10). Concretamente, sea $C_1 = \overline{K}_1$. Para un n dado, sea m_n un índice $> n$ tal que

(17) $$C_n \subset K_1 \cup \ldots \cup K_{m_n}$$

(la existencia del índice m_n se sigue del Teorema de Borel, Capítulo 15.3, Teorema 2).

Como G es un conjunto abierto conexo (por hipótesis) podemos unir K_1 por medio de arcos poligonales con cada uno de los discos $K_2, K_3, \ldots, K_{m_n}$ en el interior de G (Teorema 1, apartado 1). La unión de estos arcos poligonales y conjuntos $\bar{K}_1, \ldots, \bar{K}_{m_n}$ se designa por C_{n+1}.

La inclusión (17) conduce inmediatamente a la (10), y la igualdad (16) a la desigualdad (9) (por la inclusión (15) y la desigualdad $m_n > n$).

Por tanto, está demostrado nuestro teorema para el caso en que el conjunto abierto G sea conexo.

En el caso en que el conjunto G no sea conexo, consideremos su descomposición en componentes (cfr. Cap. 18.2, Teorema 4):

$$G = G_1 \cup G_2 \cup \ldots \cup G_n \cup \ldots$$

Como el conjunto G_n es conexo y abierto (en virtud del Teorema 3 del Capítulo 18.2) se sigue de la parte de teorema antes demostrada que

$$f \sim 1 \quad \text{sobre} \quad G_n,$$

esto es, $f(z) = e^{v_n(z)}$ para $z \in G_n$, y $v_n \in (\mathcal{E}^2)^{G_n}$.

Pongamos $\dot{v}(z) = v_n(z)$ para $z \in G_n$. Como los conjuntos G_n son abiertos se sigue (cfr. Capítulo 12, Ejercicio 5) que la función v es continua. Por tanto,

$$f(z) = e^{v(z)}, \qquad \text{donde} \qquad v \in (\mathcal{E}^2)^G, \qquad \text{esto es} \qquad f \sim 1.$$

22.5. Corolarios de los teoremas auxiliares

Corolario 1. *Sea $\mathcal{I}$ el intervalo cerrado $0 \leq t \leq 1$. Toda función $f \in \mathcal{P}^F$, donde $F = \bar{F} \subset \mathcal{I}$, satisface la fórmula $f \sim 1$.*

Demostración. Por el Teorema 3, párrafo 4 podemos asignar a cada punto $t \in F$ un conjunto abierto G_t que contiene a t, de tal modo que $f \sim 1$ en $F \cap G_t$. En virtud del Teorema de Borel-Lebesgue (Cap. 15.3, Nota 2), existe un número finito de conjuntos abiertos que cubren el conjunto F y tales que $f \sim 1$ en cada uno de ellos individualmente.

Dicho de otra forma, existe un sistema de puntos

$$0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = 1$$

tales que $f \sim 1$ en la intersección $F \cap (a_{k-1}a_k)$ para $k = 1, 2, \ldots n$.

La intersección $[F \cap (a_0a_1)] \cap [F \cap (a_1a_2)]$, al estar contenida en $\{a_1\}$ es conexa (quizá vacía). Por tanto tenemos $f \sim 1$ en $F \cap (a_0a_1 \cup a_1a_2) = F \cap (a_0a_2)$ en virtud del Teorema 7, apartado 4.

Similarmente, $f \sim 1$ en $F \cap (a_0a_2 \cup a_2a_3) = F \cap (a_0a_3)$.

Por inducción, demostramos así que $f \sim 1$ en $F \cap (a_0a_n) = F$.

Corolario 2. *Sea K un cuadrado (con su interior) $\subset \mathcal{E}^2$. Toda función $f \in \mathcal{P}^K$ satisface la fórmula $f \sim 1$.*

Demostración. Descompongamos el cuadrado K en un número finito de cuadrados $A_1, A_2, \ldots, A_n$ enumerándolos de forma que la intersección

$$A_k \cap (A_1 \cup \ldots \cup A_{k-1}) \tag{18}$$

sea conexa para $k = 2, 3, \ldots, n$ (cfr. fig. 26). Suponemos que estos cuadrados son tan pequeños que $f \sim 1$ en cada uno de ellos individualmente (razonamos como en la demostración precedente haciendo uso del Teorema 3, apartado 4, y del Teorema de Borel-Lebesgue).

16	15	14	13
9	10	11	12
8	7	6	5
1	2	3	4

Fig. 26

Como $f \sim 1$ en A_1 y en A_2 y como la intersección de $A_1 \cap A_2$ es conexa, tenemos $f \sim 1$ en $A_1 \cup A_2$. Razonando por inducción y utilizando el hecho de que la intersección (18) es conexa, deducimos que $f \sim 1$ en $A_1 \cup \ldots \cup A_n$, esto es, en K.

Corolario 3. *Toda función $f \in \mathcal{P}(\mathcal{E}^2)$ satisface la fórmula $f \sim 1$.*

Demostración. Sea K_n un cuadrado de lado n y de centro 0. Como

$$\mathcal{E}^2 = K_1 \cup K_2 \cup \ldots \cup K_n \cup \ldots$$

y como $f \sim 1$ sobre K_n en virtud del teorema precedente, deducimos del Teorema que $f \sim 1$ en $\mathcal{E}^2$.

Nota. Los Teoremas 1-3 no sólo son válidos para los conjuntos $\mathcal{I}$, K y $\mathcal{E}^2$, sino también para conjuntos que sean homeomorfos a éstos; en particular, para arcos arbitrarios, para un disco circular y para el complemento (con respecto a $\mathcal{E}^2$) de un arco poligonal.

Efectuemos la demostración para el arco.

Sea h una aplicación homeomorfa del segmento $\mathcal{I}$ sobre el arco A. Sea $f \in \mathcal{P}^A$. Substituyendo $z = h(x)$ para $x \in \mathcal{I}$, tendremos,

$$f(z) = fh(x) = e^{u(x)} = e^{uh^{-1}(z)} = e^{v(z)},$$

donde $v(z) = uh^{-1}(z)$, $z \in A$.

Corolario 4. *Sea C la circunferencia* $|z| = r$. *No existe una rama logarítmica uniforme sobre C; esto es,*

$$x \text{ no } \sim 1 \text{ sobre } C.$$

Demostración. Sea $z_0 = (r, 0)$ y $A = C - \{z_0\}$. Para $z \in A$ tenemos

(19) $$z = re^{i\alpha(z)}, \quad \text{donde} \quad 0 < \alpha(z) < 2\pi.$$

Evidentemente la función α es continua sobre A.

Supongamos que nuestro teorema fuese falso. Entonces sería

$$z = re^{i\beta(z)},$$

donde β es una función real continua sobre C.

Por ser el conjunto A conexo tendríamos (véase Teorema 5, apartado 4):

(20) $$\alpha(z) = \beta(z) + \text{constante}.$$

Entonces, se seguiría de esto que la función α se puede extender de forma continua a C. Pero esto es imposible. En efecto, sea

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z_0.$$

Si los puntos z_n están en el semiplano superior al eje x es

$$\lim_{n\to\infty} \alpha(z_n) = 0,$$

y si los puntos z_n están debajo del eje x es

$$\lim_{n\to\infty} \alpha(z_n) = 2\pi.$$

22.6. Teoremas sobre cortes del plano

Demostración del Teorema de Eilenberg (véase párrafo 3). Sea $A \subset \mathcal{P}$. Consideraremos por separado los casos en que A es un subconjunto cerrado de $\mathcal{S}_2$ y el caso en que A es un conjunto abierto.

1. $A = \bar{A} \subset \mathcal{P}$. Supongamos que A no separa a $\mathcal{S}_2$ entre los puntos $p = 0$ y $q = \infty$. Tenemos que demostrar que

(21) $$z \sim 1 \quad \text{sobre} \quad A.$$

Como los puntos p y q en uno de los componentes del conjunto $\mathcal{S}_2 - A$, existe un arco poligonal L (cfr. Teorema 1, apartado 1) tal que

(22) $$L = pq \subset \mathcal{S}_2 - A.$$

Por el Teorema 2, apartado 1 el conjunto $\mathcal{S}_2 - L$ es homeomorfo al plano $\mathcal{C}^2$ y por tanto, en virtud del Corolario 3, apartado 5 (cfr. Nota) tenemos $z \sim 1$ en $\mathcal{S}_2 - L$, de donde se sigue la fórmula (21), para $A \subset \mathcal{S}_2 - L_2$ por (22).

Supongamos a continuación que A separa a $\mathcal{S}_2$ entre los puntos $p = 0$ y $q = \infty$. Por tanto, existen (véase apartado 2) dos conjuntos cerrados R y Q tales que

(23) $$\mathcal{S}_2 = R \cup Q, \quad p \in R, \quad q \in Q,$$

(24) $$R \cap Q = A.$$

Mostraremos que la hipótesis (21) conduce a una contradicción. En efecto, de (21) se deduce que (cfr. Teorema 6, apartado 4),

(25) $$z = e^{u(z)} \quad \text{sobre} \quad A, \quad \text{donde} \quad u \in (\mathcal{E}^2)^{S_2}.$$

Hagamos

(26) $$f(z) = \begin{cases} e^{u(z)} & \text{si} \quad z \in Q, \\ z & \text{si} \quad z \in R \quad \text{y} \quad z \neq 0. \end{cases}$$

Por (24) y (25), la función f está definida y es continua para todo $z \neq 0$ (cfr. Capítulo 12, Ejercicio 4), esto es

(27) $$f \in \mathcal{P}^{S_2 - (0)}, \quad \text{de donde} \quad f \sim 1$$

en virtud del Corolario 3, apartado 5 (cfr. Nota).

Como el punto 0 no pertenece a Q, existe un disco con centro en el punto 0 que es disjunto de Q y por tanto está contenido en R. Sea C la circunferencia del disco. Tendremos, por tanto [cfr. (27)] $f \sim 1$ sobre C, esto es, por (26) $z \sim 1$ sobre C. Pero esto contradice al Corolario 4, apartado 5.

2. El conjunto A es abierto. Supongamos que el conjunto A no separa el plano $\mathcal{S}_2$ entre los puntos $p = 0$ y $q = \infty$, esto es, que estos puntos están en el mismo componente T del conjunto $\mathcal{S}_2 - A$. Por tanto, si $F = \overline{F} \subset A$, los puntos p y q están en un componente del conjunto $\mathcal{S}_2 - F$ (concretamente en el que contiene al conjunto T). Como hemos demostrado, tenemos que $z \sim 1$ en F. De esto, en virtud del Teorema 9, apartado 4, obtenemos la fórmula (21).

Supongamos a continuación que el conjunto A separa el plano $\mathcal{S}_2$ entre los puntos $p = 0$ y $q = \infty$, esto es, que estos puntos pertenecen a distintos componentes del conjunto $\mathcal{S}_2 - A$. Por tanto, existen dos conjuntos cerrados M y N (véase Capítulo 18.2, Teorema 6) tales que

(28) $$\mathcal{S}_2 - A = M \cup N, \quad p \in M, \quad q \in N,$$

(29) $$M \cap N = \emptyset.$$

Como el espacio $\mathcal{S}_2$ es normal (véase Capítulo 12.7, Teorema 6) y por la fórmula (29), existen dos conjuntos abiertos R y Q tales que

(30) $$M \subset R \quad N \subset Q,$$

(31) $$R \cap Q = \emptyset.$$

Sea

(32) $$F = \mathcal{S}_2 - (R \cup Q).$$

El conjunto F es, por tanto, cerrado. Por (30) y (28), tenemos

(33) $$F = \mathcal{S}_2 - (R \cup Q) \subset \mathcal{S}_2 - (M \cup N) = A,$$

$p \in R$ y $q \in Q$.

Por tanto $\mathcal{S}_2 - F$ es la unión de dos conjuntos disjuntos R y Q de los cuales uno contiene a p y el otro contiene a q [cfr. (32)]. El conjunto F separa, por tanto, a $\mathcal{S}_2$ entre estos puntos. En virtud de la parte de teorema antes demostrada, tenemos que z no ~ 1 sobre F.

Pero como $F \subset A$ [por (33)] tenemos *a fortiori*, que z no ~ 1 sobre A.

22.7. Teoremas de Janiszewski

Teorema 1. *Sean A y B dos conjuntos cerrados o dos conjuntos abiertos de $\mathcal{S}_2$. Si ninguno de estos dos conjuntos separa a $\mathcal{S}_2$ entre los puntos p y q y si la intersección $A \cap B$ es conexa, entonces la unión $A \cup B$ tampoco separa a $\mathcal{S}_2$ entre esos puntos.*

Demostración. Por medio de la transformación homográfica

(34) $$h(z) = (z - p)/(z - q)$$

reducimos la demostración al caso en que

(35) $$p = 0, \qquad q = \infty.$$

Por tanto, supongamos que se verifican las igualdades (35).

Como ni A ni B separan al plano $\mathcal{S}_2$ entre los puntos p y q, se verifican las relaciones

$$z \sim 1 \text{ sobre } A \quad \text{y} \quad z \sim 1 \text{ sobre } B$$

por el Teorema de Eilenberg.

De esto se sigue, en virtud del Teorema 7, apartado 4, que $z \sim 1$ sobre $A \cup B$. Y, por tanto, por el Teorema de Eilenberg, $A \cup B$ no separa a $\mathcal{S}_2$ entre p y q.

Teorema 2. *Como antes, sean A y B dos subconjuntos abiertos o dos cerrados de $\mathcal{S}_2$. Si los conjuntos A y B son conexos, pero no lo es la intersección $A \cap B$, entonces la reunión $A \cup B$ separa $\mathcal{S}_2$ entre algún par de puntos.*

Demostración. Utilizamos la notación usual

$$A^c = \mathcal{S}_2 - A, \qquad B^c = \mathcal{S}_2 - B.$$

Supongamos — en contra de la afirmación de nuestro teorema — que el conjunto $A \cup B$ no separa a $\mathcal{S}_2$, esto es, que el conjunto

$$\mathcal{S}_2 - (A \cup B) = A^c \cap B^c$$

es conexo. Demostraremos que las hipótesis del Teorema 1 se satisfacen por los conjuntos A^c y B^c, donde p, q es una pareja arbitraria de puntos pertenecientes a $A \cap B$.

En efecto, ambos conjuntos A^c y B^c son abiertos o ambos cerrados, y su intersección $A^c \cap B^c$ es conexa. Queda por demostrar que ni el conjunto A^c ni el B^c separan a $\mathcal{S}_2$ entre los puntos p y q, esto es, que ambos puntos pertenecen a alguno de los componentes del complementario del conjunto A^c o algún componente del conjunto A, y, similarmente, a algún componente del conjunto B. Pero esto se sigue inmediatamente de la hipótesis de que los conjuntos A y B son conexos y contienen a los puntos p y q.

Aplicando el primero de los teoremas de Janiszewski a los conjuntos A^c y B^c deducimos que la unión $A^c \cup B^c$ no separa a $\mathcal{S}_2$ entre p y q, esto es, que p y q pertenecen al mismo componente del conjunto $(A^c \cup B^c)^c = A \cap B$. Pero como los puntos p y q son puntos arbitrarios pertenecientes a $A \cap B$, se sigue de esto que el conjunto $A \cap B$ es conexo, en contra de la hipótesis.

22.8. Teorema de Jordán

Para toda curva simple cerrada $C \subset \mathcal{S}_2$ (esto es, para todo conjunto homeomorfo a una circunferencia), $\mathcal{S}_2 - C$ descompone a $\mathcal{S}_2$ en dos regiones y C es su frontera común.

Adelantamos a la demostración el siguiente lema.

Lema. *Ningún arco o subconjunto cerrado de un arco separa a $\mathcal{S}_2$.*

Demostración. Supongamos, en contra de la hipótesis, que algún subconjunto cerrado del arco L separase a $\mathcal{S}_2$ entre los puntos p y q. Aplicando la transformación homográfica (34) podemos suponer que estos puntos son $p = 0$ y $q = \infty$. Por el Teorema de Eilenberg tendríamos z no ~ 1 en F. Pero esto contradice al Teorema 1, apartado 5 (véase Nota, apartado 5).

Demostración del Teorema de Jordán. Como la curva C se puede representar como la reunión de dos arcos cuya intersección no es conexa (concretamente, consiste en dos puntos), deducimos del segundo Teorema de Janiszewski que C separa a $\mathcal{S}_2$.

Sea

$$R_1, R_2, \ldots \tag{36}$$

la sucesión de componentes del conjunto $\mathcal{S}_2 - C$. Hemos demostrado que esta sucesión contiene como mínimo dos términos. Queda por demostrar que tampoco contiene más de dos términos y que

$$\mathrm{Fr}(R_1) = C = \mathrm{Fr}(R_2). \tag{37}$$

Empezaremos con la demostración de la fórmula (37). En virtud del Teorema 6 del Capítulo 18.2, tenemos

$$\mathrm{Fr}(R_1) \subset C. \tag{38}$$

Si no se verificase la igualdad (37), entonces el conjunto $\mathrm{Fr}(R_1)$ no sería subconjunto cerrado de ningún arco (contenido en C), y, por tanto, por el lema, no separaría a $\mathcal{S}_2$. Pero esto es imposible, ya que $\mathrm{Fr}(R_1)$ separa claramente a $\mathcal{S}_2$ entre todo punto de R_1 y todo punto de R_2.

Por tanto, está demostrada la primera de las igualdades (37) y la segunda se obtiene por simetría.

Queda por demostrar que la sucesión (36) sólo tiene dos términos.

Supongamos lo contrario, esto es, que existen por lo menos tres regiones R_1, R_2, R_3. Sea

(39) $$p_j \in R_j \quad \text{para} \quad j = 1, 2, 3.$$

Supongamos que la región R_3 está acotada. Sea Z una recta que pasa por el punto p_3. Esta recta contendrá al segmento $L = ap_3b$ situado en R_3 con la excepción de los extremos, pertenecientes a C:

(40) $$L \subset R_3 \cup \{a\} \cup \{b\}.$$

Sean aq_1b y aq_2b dos arcos de la curva C determinados por los puntos a y b.

Por tanto tenemos

(41) $$aq_1b \cup aq_2b = C,$$

y

(42) $$aq_1b \cap aq_2b = \{a, b\}.$$

Sea

(43) $$A_1 = aq_1b \cup L, \qquad A_2 = aq_2b \cup L.$$

De las fórmulas (42) y (43) se deduce que

(44) $$A_1 \cap A_2 = L.$$

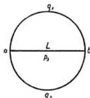


Fig. 27

Como $q_1, q_2 \in C$, por tanto, deducimos de (37) que los conjuntos $R_1 \cup \{q_1\} \cup R_2$ y $R_1 \cup \{q_2\} \cup R_2$ son conexos, y de (39) que contienen a los p_1 y p_2. Como estos conjuntos son disjuntos de A_2 y A_1 respectivamente [cfr. (40) y (43)], los conjuntos A_1 y A_2 no separan a $\mathcal{S}_2$ entre p_1 y p_2. De

la fórmula (44) deducimos en virtud del primer teorema de Janiszewski que $A_1 \cup A_2$ tampoco separa a $\mathcal{S}_2$ entre p_1 y p_2. Pero esto es imposible porque [cfr. (41) y (43)] $A_1 \cup A_2 = C \cup L$, y C separa a $\mathcal{S}_2$ entre p_1 y p_2.

**Nota* 1. Podemos afinar el teorema de Jordán introduciendo el interesante concepto del punto accesible. Concretamente, decimos que un punto p sobre la frontera de una región R es *accesible* desde esta región si existe un arco que contenga el punto p y que esté completamente — con excepción del punto p — en la región R.

Un ejemplo de un punto que no es accesible es el siguiente. Sea C la clausura de la curva $y = \operatorname{sen}(1/x)$, $0 < |x| \leq 1$, y sea R el complemento del continuo C; el punto $\langle 0, 0 \rangle$ no es accesible desde la región R.

Se puede demostrar que *todo punto de una curva simple cerrada es accesible desde las dos regiones en que la curva separa al plano.*

En el caso general de una región arbitraria R, los puntos que son accesibles desde R forman un conjunto denso en su frontera. En efecto, sea $p \in \mathrm{Fr}(R)$. Para $\varepsilon > 0$ existe un punto $q \in R$ a la distancia $< \varepsilon$ de p. En el segmento qp sea r el primer punto (partiendo de q) del conjunto $\mathrm{Fr}(R)$. Por tanto, el segmento qr está, — con la excepción del punto r — completamente en la región R. Por tanto, el punto r es accesible desde R. Al mismo tiempo $|r - q| \leq |q - p| < \varepsilon$.

**Nota* 2. El teorema siguiente constituye otra generalización importante del Teorema de Jordán:

Sea S una circunferencia y C una curva simple cerrada contenida en $\mathcal{S}_2$. Todo homeomorfismo h que aplique S sobre C se puede extender a un homeomorfismo h^* de todo el plano $\mathcal{S}_2$ sobre sí mismo; esto es, $h^*(\mathcal{S}_2) = S_2$ y $h^*(p) = h(p)$ para $p \in S$.

Con este teorema se puede demostrar que toda propiedad topológica de la circunferencia S con respecto al plano $\mathcal{S}_2$ (tales como el número de componentes de $\mathcal{S}_2 - S$ y la accesibilidad de puntos sobre la circunferencia) se verifica también para toda curva cerrada simple.

Un teorema análogo es el que se refiere a arcos situados en $\mathcal{S}_2$: *todo homeomorfismo definido sobre el segmento $\mathcal{I}$ se puede extender a un homeomorfismo de $\mathcal{S}_2$ sobre $\mathcal{S}_2$.*

No obstante, este teorema no es válido para arcos (ni para curvas simples cerradas) situadas en $\mathcal{E}^3$. El arco de Antoine al que nos hemos referido en la nota final del apartado 1 es un contraejemplo.

**Nota* 3. El Teorema de Jordán es un caso especial del siguiente teorema sobre la invariancia del número de componentes del complemento de un conjunto cerrado sobre la esfera $\mathcal{S}_n$ (esto es, sobre la superficie de la esfera unidad en el espacio euclídeo $\mathcal{E}^{n+1}$): *si $F = \overline{F} \subset \mathcal{S}_n$ y si el conjunto $\mathcal{S}_n - F$ tiene k componentes, entonces para toda transformación homeomorfa h*

del conjunto F sobre un subconjunto del espacio $\mathcal{S}_n$ se sigue que el conjunto $\mathcal{S}_n - h(F)$ tiene también k componentes.

La demostración de este teorema se puede realizar utilizando el concepto de homología extendida a conjuntos compactos arbitrarios (*).

Como para los poliedros, demostraremos que los números de Betti son invariantes topológicos y que el número $(n-1)$-ésimo de Betti del conjunto cerrado F situado en $\mathcal{S}_n$ es igual al número de componentes del conjunto $\mathcal{S}_n - F$ menos 1.

Para conjuntos sobre $\mathcal{S}_2$ la demostración del teorema anterior se puede realizar considerando que el espacio funcional $\mathcal{P}^F$ es un grupo. La operación del grupo se define del modo siguiente:

Sean f_1, f_2 y f_3 tres elementos del espacio $\mathcal{P}^F$. Diremos que $f_3 = f_1 \cdot f_2$ cuando $f_3(z) = f_1(z) \cdot f_2(z)$ para todo $z \in F$.

Las funciones f que satisfacen la condición $f \sim 1$ forman un subgrupo del grupo $\mathcal{P}^F$, como se ve fácilmente. Designémosla por $\mathbf{G}$ y consideremos el grupo cociente $\mathbf{B}(F) = \mathcal{P}^F/\mathbf{G}$.

El rango de este grupo, o máximo número de elementos linealmente independientes, es igual al número de componentes del conjunto $\mathcal{S}_2 - F$ menos uno, como se puede demostrar.

Señalemos, por último, que la demostración de la invariancia de la propiedad de un subconjunto cerrado F de $\mathcal{S}_n$ de separar a $\mathcal{S}_n$ se puede hacer sin utilizar la homología, ya que, la conexión de $\mathcal{S}_n - F$ y de $\mathcal{S}_{n-1}^F$ son equivalentes (**).

EJERCICIOS

1. Demostrar que z^n no es ~ 1 para $n \neq 0$ en la circunferencia de un círculo con centro 0.

2. Demostrar que si $f \in \mathcal{P}^{\mathcal{S}_2}$, entonces $f \sim 1$.

Sugerencia: Descomponer $\mathcal{S}_2$ por el ecuador y aplicar el Corolario 2, apartado 5.

3. Demostrar que la «estrella» consistente en n arcos con un extremo común, y sin más puntos comunes, no descompone el plano.

4. Demostrar que la curva formada por tres arcos con extremos comunes y sin más puntos comunes (fig. 27) descompone el plano en tres regiones.

(*) Se ha dado otra demostración por K. Borsuk. Esta demostración requiere un material que escapa con mucho del fin de este libro. Véase *Fundamenta Mathematica*, 37 (1950), págs. 217-241 y mi *Topologie*, vol. II, 3.ª edición, 1961.

(**) Teorema de Borsuk; véase *Monatshefte für Mathematik u. Physik*, 38 (1931), página 218 y *Mathematische Annalen*, 106 (1932), pág. 239. También v. P. Aleksandrov, *Dimensionstheorie*, * 5, Mat. Ann. 106 (1932), pág. 218, o mi *Topologie*, vol. II, pág. 347.

5. Un espacio conexo se dice que es *unicoherente* si $A \cap B$ es conexo para toda descomposición del espacio en dos conjuntos cerrados conexos A y B. Demostrar que el disco circular y el espacio $\mathcal{S}_2$ son unicoherentes.

6. Demostrar que si C es un subcontinuo del plano $\mathcal{S}_2$ (o, más general, de un espacio conexo unicoherente), y R es un componente del complemento de C, entonces $\mathrm{Fr}(R)$ es un continuo.

Sugerencia: Utilizar el Teorema 4, Capítulo 16.3.

7. Sea el espacio X un continuo unicoherente localmente conexo. Si el conjunto cerrado F separa este espacio entre los puntos a y b, contiene un subcontinuo que también separa el espacio entre estos puntos.

Sugerencia: Considerar el componente R del conjunto $X - F$ que contiene el punto a y el componente P del conjunto $X - \overline{R}$ que contiene el punto b, y aplicar el Ejercicio 6, anterior, y el Ejercicio 11 del Capítulo 18.

8. Bajo las hipótesis precedentes sobre el espacio X, sean A y B dos conjuntos cerrados disjuntos ninguno de los cuales separa a X entre los puntos p y q. Demostrar que, entonces, $A \cup B$ tampoco separa al espacio entre p y q.

9. Mostrar por medio de un ejemplo que sin la hipótesis de unicoherencia, los teoremas de los Ejercicios 6-8 son falsos.

10. Designemos por $\mathcal{S}$ la circunferencia del círculo de radio 1 y con centro 0. Supongamos que la función $f \in \mathcal{S}^{\mathcal{S}}$ satisface la condición $f(-z) = -f(z)$ para todo $z \in \mathcal{S}$. Entonces no se satisface la condición $f \sim 1$.

11. Teorema de Borsuk-Ulam, o de los antípodas. Para toda función $f \in (\mathcal{C}^2)^{\mathcal{S}_2}$ existe un punto z_0 tal que $f(z_0) = f(-z_0)$.

Sugerencia: Para todo punto p perteneciente al disco Q_2 de radio 1 y centro 0, designemos por p^+ el punto perteneciente a la «mitad superior» de $\mathcal{S}_2$, cuya proyección es p. Sea $h(p) = f(p^+) - f(-p^+)$. Supongamos, en contra del teorema, que $h(p) \neq 0$ para todo p. Mostrar (utilizando el corolario 2, apartado 5 y la nota que le sigue inmediatamente) que esta hipótesis conduce a contradicción con el teorema anterior.

12. Se dice que una región R situada en el plano $\mathcal{S}_2$ es *simplemente conexa* si su complemento, esto es, el conjunto $\mathcal{S}_2 - R$ es conexo.

Demostrar que si una región simplemente conexa, $R \subset \mathcal{S}_2$ contiene una curva simple cerrada C, también contiene uno de los componentes de su complemento. En particular, si R no contiene el punto del infinito, contiene un componente acotado del conjunto $\mathcal{S}_2 - C$.

Sugerencia: Advertir que el conjunto $\mathcal{S}_2 - R$ está contenido en uno de los componentes del conjunto $\mathcal{S}_2 - C$.

Nota. La propiedad de las regiones simplemente conexas formulada en el teorema anterior es también condición suficiente para la conexión simple, como se puede demostrar.

13. Sea R una región simplemente conexa contenida en $\mathcal{S}_2$, y sea L un arco que, excepto en sus extremos, está situado en R. Demostrar que el arco L separa la región R (esto es, que R-L no es conexo).

14. Demostrar el siguiente teorema, más general: sea R una región arbitraria contenida en $\mathcal{S}_2$, y L un arco que, excepto en sus extremos está

en R; una condición necesaria y suficiente para que este arco separe a R es que ambos extremos pertenezcan al mismo componente del conjunto $\mathcal{S}_2 - R$.

Sugerencia: En la demostración de que la condición es necesaria utilizar el Teorema 6, Capítulo 17.2, y el primero de Janiszewski. Para la condición suficiente utilizar el segundo teorema de Janiszesski.

15. Si C es un continuo contenido en $\mathcal{S}_2$, entonces cada uno de los componentes del conjunto $\mathcal{S}_2 - C$ es una región simplemente conexa.

Sugerencia: Cfr. Teorema 4, Capítulo 16.3.

BIBLIOGRAFÍA SUCINTA

Bastantes tratados modernos de Análisis Matemático presentan unos capítulos iniciales de Teoría de conjuntos y Topología. Por ejemplo:

J. FAVARD: *Cours d'Analyse de l'Ecole Polytechnique* (tomo I), Ed. Gauthier-Villars, París, 1960.

Los conocidos Elementos de Matemática de Bourbaki dedican a estos temas sus dos primeros libros:

N. BOURBAKI: *Thèorie des ensembles.* Edit. Hermann (Actualités Scientifiques, núms. 1141, 1212, 1258), París.

N. BOURBAKI: *Topologie générale.* Ídem. (Act. Sc. núms. 1045, 1084, 1142, 1143, 1235), París.

Entre las publicadas en castellano citamos las siguientes:

M. FRÉCHET y KY FAN: *Introducción a la Topología combinatoria* (traducción de D. A. H. Nogués), Editorial Universitaria de Buenos Aires, 1959.

E. M. PATTERSON: *Topología* (trad. de L. Álvarez Valdés), Ed. Dossat, Madrid.

J. L. KELLEY: *Topología General* (trad. de O. A. Varsavsky), Ed. Univ. de Buenos Aires, 1962.

H. SEIFERT y W. THRELFALL: *Lecciones de Topología* (trad. de J. R. Fuentes), Publicaciones del Consejo S. de I. C., Madrid, 1951.

J. G. HOCKING y G. H. YOUNG: *Topología* (trad. de A. Plans), Ed. Reverté, Barcelona, 1966.

Como libros oportunos para complementar el estudio de este texto, se citan por el autor, además de algunos de los anteriores, los que siguen. Para la Teoría de conjuntos:

P. BERNAYS: *Axiomatic Set Theory*, Amsterdam, 1958.

A. FRAENKEL: *Abstract Set Theory*, Amsterdam, 1953.

P. HALMOS: *Naive Set Theory*, Van Nostrand, Princeton, 1960.

F. HAUSDORFF: *Set Theory*, Chelsea, New York, 1957.

E. KAMKE: *Theory of Sets*, Dover Publications, New York, 1950.

W. SIERPINSKI: *Algebre des ensembles*, Monografie Matematyczne, Varsovia, 1951.

W. SIERPINSKI: *Cardinal and Ordinal numbers*, Ídem, Varsovia, 1951.

P. SUPPES: *Axiomatic Set Theory*, Van Nostrand, Princeton, 1960.

A. TARSKI: *Cardinal Algebras*, Oxford Univ. Press, New York, 1949.

Para la Topología:

P. S. ALEKSANDROV: *Combinatorial Topology*, Graylock, Rochester, 1956-57.

P. S. ALEKSANDROV y H. HOPF: *Topologie*, I. Edwards, Ann Arbor, 1957.

S. EILENBERG y N. STEENROD: *Foundations of Algebraic Topology*, Princeton, 1952.

✓ F. HAUSDORFF: *Set Theory*, Chelsea, New York, 1957.
W. HUREWICZ y H. WALLMAN: *Dimension Theory*, Princeton, 1948.
• K. KURATOWSKI: *Topologie* (vol. I, 4.ª ed., 1958; vol. II, 3.ª ed.), 1961. Monografie Matem., Varsovia.
• S. LEFSCHETZ: *Introduction to Topology*, Princeton, 1949.
• M. H. A. NEWMAN: *Elements of the Topology of Plane Sets of Points*, Univ. Press, Cambridge, 1952.
J. NÖBELING: *Grundlagen der Analystichen Topologie*, Springer, Berlín, 1954.
• L. S. PONTRJAGIN: *Topological Groups*, Princeton, 1939.
• L. S. PONTRJAGIN: *Foundations of Combinatorial Topology*, Rochester, 1952.
• W. SIERPINSKI: *General Topology*: Univ. Press, Toronto, 1952.
• A. H. WALLACE: *An Introduction to Algebraic Topology*, Pergamon, Londres, 1957.
• G. T. WHYBURN: *Analytic Topology*: Coll, Public., New York, 1942.
• R. L. WILDER: *Topology of Manifolds*: Coll. Public., New York. 1949.

Tabla de los símbolos utilizados

ÍNDICE - GLOSARIO

Al añadirle un conciso glosario al índice alfabético, sólo se ha pretendido facilitar el trabajo del lector que necesita recuperar la información del texto. Las definiciones y enunciados se han redactado, pues, en forma concisa, pero que ordinariamente será suficiente para la orientación del lector obligado a consultar el índice. Las ampliaciones y precisiones que a veces le serán necesarias podrá encontrarlas en el texto, en la *página* que indica el *número* puesto a continuación del concepto registrado.

Varios inconvenientes se han señalado a la costumbre de distinguir a algunos teoremas con el nombre de su descubridor (aproximadamente). Sin opinar nosotros sobre este punto, nos hemos limitado a enunciar aquí los que de ese modo se han designado en el texto. No hemos, pues, elaborado un catálogo de enunciados de teoremas (cosa que, por otra parte, es inimaginable), limitándonos a dar una lista de los que el texto determina con nombres propios, porque esto sí puede ofrecer alguna utilidad al lector.

N. del T.

nexos que contienen al punto.

Condensación, Punto de, 141.
Si en todo entorno de un punto p del conjunto A hay una infinidad no numerable de puntos de A, se dice que p es un punto de condensación de A.

Conexión entre dos conjuntos, 180.
Se dice que el espacio X es conexo entre dos conjuntos A y B, si X no se puede descomponer en dos conjuntos cerrados disjuntos, conteniendo uno a A y el otro a B.

Conexión por arcos, 189.
Un espacio es localmente conexo por arcos si para todo punto p y todo $\varepsilon > 0$ existe un $\eta > 0$ tal que si $|x - p| < \eta$ el punto x puede conectarse con el punto p mediante un arco de diámetro menor que ε.

Conexo. (V. *Espacio conexo*.)

Conjunción de propposiciones, 19.

Conjunto cociente por una relación de equivalencia, 58.
Los elementos de X/ϱ son los conjuntos $E_x\,(x\,\varrho\,x_0)$, con $x_0 \in X$.

Conjunto-F_σ, 121.
Es el que se obtiene por una unión numerable de conjuntos cerrados.

Conjunto $F_{\sigma\delta}$, 112.
Intersección numerable de conjuntos F_σ.

Conjunto-G_δ, 111.
Es el que se obtiene de una intersección numerable de conjuntos abiertos.

Conjunto $G_{\delta\sigma}$, 112.
Unión numerable de conjuntos G_δ.

Conjuntos de primera categoría, 145.
Son los constituidos por una unión numerable de conjuntos frontera cerrados de un espacio completo, así como sus subconjuntos.

Conjunto vacío, 24.

Constituyente, 31.

Contenido topológicamente, 198.
El espacio A está contenido topológicamente en el espacio X si A es homeomorfo con algún subespacio de X.

Continuo, Hipótesis del, 81.

Continuo, Ordenación del, 74.

Continuo, Potencia del, 59.

Continuo topológico, 181.
Es un espacio compacto y conexo.

Convergencia continua, 155.
Se dice que la sucesión de funciones $f_1, f_2, \ldots$, converge con continuidad hacia la función f si la condición $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ implica que

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_n) = f(x).$$

Convergencia uniforme, 39, 122.

Coordenadas baricéntricas, 203.
Si $p = (x_1, \ldots, x_n)$ es un punto de $\mathcal{E}^n$, y λ un número real, poniendo

$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = $$
$$= (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n),$$
$$\lambda(x_1, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n),$$

los números $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ se llaman coordenadas baricéntricas del punto

$$p = \lambda_0 p_0 + \lambda_1 p_1 + \ldots + \lambda_n p_n$$

con los puntos de referencia $p_0, p_1, \ldots, p_n$ (que suponemos linealmente independientes).

Corte, 225.
El conjunto A es un corte del plano de Gauss $\mathfrak{S}_2$ si el conjunto $\mathfrak{S}_2 - A$ no es conexo.

Cota superior mínima, 49, 73.

Continua, Aplicación, 116, 153, 164.

Continua, Función, 116, 117.

Cuantificadores, 33.

Cubo de Hilbert, 95.
Es el conjunto de sucesiones $x = (x_1, x_2, \ldots)$ con $0 \leq x \leq 1$ para $i = 1, 2, \ldots$, y la distancia definida por

$$|x - y| = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2_m}\right) |x_m - y_m|.$$

Cubo n-dimensional, 38.

Darboux, Propiedad de, 175.
Al pasar la función real f de un valor a otro toma todos los intermedios.

De Morgan (leyes generalizadas), 34, 43.
De Morgan (leyes para conjuntos), 28.
De Morgan (leyes para proposiciones), 20.
Dedekind, Cortadura de, 74.
Densa, Ordenación, 73.
Denso, Conjunto, 109.
Un conjunto A es denso (se sobreentiende siempre: en el espacio X) si su clausura es todo el espacio. $\equiv A$ es denso si en todo entorno esférico se encuentran puntos de A.
Denso en sí, Conjunto, 110.
Conjunto en el que todos sus puntos son de acumulación. $\equiv$ Conjunto sin puntos aislados. $\equiv$ $A \subset A^d$.
Derivado, Conjunto, 104.
El conjunto derivado de A es el conjunto A^d constituido por los puntos de acumulación de A.
Desigualdad de cardinales, 65.
Desigualdad de ordinales, 77.
Desigualdad triángular, 94.
(distancia de x a y) + + (dist. de y a z) $\leq$ $\leq$ (dist. de x a z).
Diagonal (teorema =), 63.
Diámetro de un espacio métrico X, 95.
Es el extremo superior, $\delta(X)$, de las distancias entre cada dos puntos de X.
Diferencia de conjuntos, 23.
Diferencia simétrica de conjuntos, 31.
Diferencia simétrica de proposiciones, 22.
Dimensión de un simplex, 208.
Si S es un simplex del espacio euclídeo $\mathcal{E}^n$, la dimensión topológica de $\bar{S}$ es n; din $\bar{S} = n$.
Dimensión geométrica, 38.
Dimensión topológica, 198.
La dimensión de $\varnothing$ es -1. La dimensión del conjunto X en el punto p, es
(1) $\dim_p X \leq n$
si un abierto arbitrariamente pequeño de p tiene frontera de dimensión $\leq n-1$. La dimensión de X es
(2) $\dim X \leq n$
si en cada punto de X vale la (1). Si (1) no vale para ningún n se escribe $\dim_p X = \infty$. Si (2) no vale para ningún n se escribe $\dim X = \infty$.
Diseminado, Conjunto, 111.
Es aquel que carece de subconjuntos no vacíos que sean densos en sí.
Disjuntos, Conjuntos, 24.
Distancia entre dos números, 94.
Es el módulo de su diferencia.
Distancia entre dos puntos. (V. *Espacio métrico*.)
Distancia de un punto a un conjunto, 126.
La distancia, $\varrho(x, A)$ del punto x al conjunto A es cota inferior máxima de las distancias de x a los puntos de A:
$\varrho(x, A) = \inf |x-a|$, con a en A.
Distancia entre dos conjuntos, 134.
Sean A y B conjuntos cerrados. Su distancia, Dist (A, B) es el mayor de estos dos números: el supremo de las distancias de los puntos de A al conjunto B y el supremo de las distancias de los puntos de B al conjunto A.
Distancia entre dos funciones, 95.
Disyunción o disyuntiva, 19.
División de conjuntos, 31.
Dominio (de una función), 41.
Conjunto X de los valores que toma su argumento.
Dualidad (en Topología), 108.
Consecuencia de las leyes de Morgan: A todo teorema sobre conjuntos abiertos (cerrados) de un espacio topológico corresponde otro sobre conjuntos cerrados (abiertos) intercambiado $\cap$ y $\cup$.

Eje (de abscisas; de ordenadas), 43.
Eilenberg, Teorema de, 226.
Condición necesaria y suficiente para que A (subconjunto abierto o compacto de $\mathcal{E}^2 - \{0\}$) no separe a $\mathcal{S}_2$ entre 0 e ∞, es que

2. $\lim_{n\to\infty} p_n = p$ y $k_1 < k_2 < \dots \Rightarrow$

$\lim_{n\to\infty} p_{k_n} = p.$

3. Si $\lim_{n\to\infty} p_n \neq p$, existe una sucesión parcial $\{p_{kn}\}$ en la que ninguna subsucesión tiene límite p. (Los espacios métricos son caso particular de éstos.)

Espacio localmente conexo, 187.
Un espacio es localmente conexo en un punto p cuando cualquier entorno del punto p contiene un entorno conexo de ese punto. El espacio se llama localmente conexo cuando es localmente conexo en todos sus puntos.

Espacio localmente separable, 143.
Un espacio es localmente separable en un punto p si existe algún entorno de p que sea separable.

Espacio métrico, 94.
Es un conjunto X cuando a cada par de sus elementos (puntos) x, y, se hace corresponder un número real $|x - y| \geq 0$, llamado distancia de x a y, con las condiciones:

1) $|x - y| = 0 \Leftrightarrow x = y$,
2) $|x - y| = |y - x|$,
3) $|x - y| + |y - z| = |x - z|$.

Espacio normal, 127.
Aquel en que dos conjuntos cerrados disjuntos cualesquiera A, B, pueden incluirse en sendos abiertos que son disjuntos.

Espacio separable, 135.
El que contiene un subespacio denso numerable. ≡ El que contiene una sucesión de puntos $\{p_n\}$ tal, que cualquier punto del espacio es de la forma $p = \lim_{n\to\infty} p_{k_n}$.

Espacio τ_1, 103.
Es un espacio topológico (ver espacio topológico, def. 1) en el que la clausura de un conjunto que tiene un solo elemento es el mismo cojunnto: $\overline{\{p\}} = p$.

Espacio τ_2, 114.
Es un espacio topológico (ver espacio topológico, def. 2) donde si p y q son puntos distintos existen entornos U de p y V de q que son disjuntos.

Espacio topológico, 102, 114.
Definición 1. Es un conjunto en el que se ha definido una operación llamada clausura por la que a cada subconjunto A se le hace corresponder otro $\bar{A}$ con estas condiciones:

1) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$,
2) $A \subset \bar{A}$,
3) $\bar{\varnothing} = \varnothing$,
4) $\overline{(\bar{A})} = \bar{A}$.

Definición 2. Es un conjunto en el que existen ciertos subconjuntos, llamados *abiertos* que cumplen las siguientes condiciones:

1) La reunión de cualquier número de abiertos es un abierto.
2) La intersección de dos abiertos es un abierto.
3) El conjunto nulo es abierto.
4) El espacio es abierto.

Espacio totalmente acotado, 168.
Para todo ε, ese espacio es la unión de un número finito de conjuntos de diámetro menor que ε.

Espacio unicoherente, 239.
Espacio conexo en el que $A \cap B$ es conexo para toda descomposición del espacio en dos conjuntos cerrados conexos A y B.

Euclídeo. (V. *Espacio euclídeo*.)

Euler, Número de, 222.

Exponenciación de cardinales, 61.

Exponenciación de ordinales, 83.

Extensión de una función, 128.
Si f es una función definida en un subespacio F del espacio X, y la función f^* está definida en H, con $F \subset H \subset X$, y es $f^*(x) = f(x)$ para todo $x \in F$, se dice que f^* es la extensión de la función f a H.

Familia, 39.
Un conjunto cuyos elementos son conjuntos.